Exercice 1

Il s'agit d'un processus AR(1) car la fonction d'autocorrélation partielle est nulle au delà du rang 1 et la fonction d'autocorrélation décroît géométriquement. Le processus est de la forme :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$ et $\varphi = 0{,}9$ (nous pourrions aussi avoir une constante dans ce modèle, cela n'affecterait pas les moments d'ordre 2). Il n'est pas possible d'identifier σ_ε^2 avec l'information disponible.

Exercice 2

Puisque le processus AR(1) stationnaire est de moyenne non nulle, il doit être de la forme :

$$Y_t = c + \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$, que nous supposerons gaussien pour écrire la vraisemblance, $c \in \mathbb{R}$

et $|\varphi|<1$. (1) La vraisemblance exacte est la densité jointe de l'échantillon y_T. Dans le cours nous avons vu deux approches pour écrire cette densité : en factorisant la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ ou, plus simplement en utilisant le théorème de Bayes pour écrire directement la densité jointe comme un produit de T-1 densités conditionnelles et d'une densité marginale pour Y_1. Je ne reprends pas les détails ici, reportez-vous au cours, vous devez trouver :

$$\mathcal{L}(\varphi, \sigma_\varepsilon^2; y_T) = \underbrace{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-\varphi^2}{\sigma_\varepsilon^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1-\varphi^2}{\sigma_\varepsilon^2}(y_1-\mu)^2}}_{\text{densité marginale de } y_1} \cdot \underbrace{(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{T-2}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - c - \varphi y_{t-1})^2}}_{\text{produit des densités conditionnelles de } Y_t | Y_{t-1}}$$

(2) On obtient la vraisemblance exacte en omettant la densité marginale de Y_1. La vraisemblance en logarithme est donc :

$$l_c(\varphi, \sigma_\varepsilon^2; y_T) = -\frac{T-1}{2}\log 2\pi - \frac{T-1}{2}\log\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{T}(\overbrace{y_t - c - \varphi y_{t-1}}^{\varepsilon_t})^2$$

(3) Maximiser la vraisemblance conditionnelle par rapport à c et φ est donc équivalent à maximiser

$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - c - \varphi y_{t-1})^2$$

ou encore à minimiser

$$\sum_{t=2}^{T}(y_t - c - \varphi y_{t-1})^2$$

par rapport à c et φ. Il s'agit précisément du programme des MCO (minimisation de la somme des carré des résidus) puisque $y_t - c - \varphi y_{t-1} = \varepsilon_t$.

Exercice 3

(1) Ce modèle ARMA(1,1) est asymptotiquement stationnaire puisque la racine du polynome retard autorégressif $A(L) = 1 - \frac{2}{3}L$ est plus grande que 1 en valeur absolue (la racine est 3/2). Le même processus est inversible car la racine du polynome retard moyenne mobile $B(L) = 1 - \frac{1}{2}L$ est plus grande que 1 (la racine est 2).

(2) Si le processus est stationnaire au second ordre alors les moments d'ordre 1 et 2 sont invariants.

(3) Calculons l'espérance de Y_t en exploitant l'invariance de ce moment. On a

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{2}{3}\mathbb{E}[Y_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}]$$

car l'espérance est linéaire. De façon équivalente on a :

$$\mu = \frac{2}{3}\mu \qquad (*)$$

car ε_t est nul en espérance et $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$ pour tout t. La seule valeur de μ compatible avec l'équation $(*)$ est 0, on a donc

$$\boxed{\mu = 0}$$

(4) Calculons les autocovariances d'ordre 0 et 1.

$$y_t = \frac{2}{3} y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$$

- $$y_t^2 = \frac{2}{3} y_t y_{t-1} + y_t \varepsilon_t - \frac{1}{2} y_t \varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma(0) = \frac{2}{3}\gamma(1) + \mathbb{E}[y_t \varepsilon_t] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[y_t \varepsilon_{t-1}]$$

$$\mathbb{E}[y_t \varepsilon_t] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{2}{3} y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_t\right] = 1$$

$$\mathbb{E}[y_t \varepsilon_{t-1}] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{2}{3} y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_{t-1}\right]$$

car le processus est stationnaire

$$= \frac{2}{3}\mathbb{E}[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}] + 0 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\hookrightarrow \gamma(0) = \frac{2}{3}\gamma(1) + 1 - \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(0) = \frac{2}{3}\gamma(1) + \frac{11}{12}}$$

- $$y_t y_{t-1} = \frac{2}{3} y_{t-1}^2 + y_{t-1}\varepsilon_t - \frac{1}{2} y_{t-1}\varepsilon_{t-1}$$

$$\hookrightarrow \gamma(1) = \frac{2}{3}\gamma(0) + 0 - \frac{1}{2}$$

car $\mathbb{E}[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}] = \mathbb{E}[y_t \varepsilon_t] = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(1) = \frac{2}{3}\gamma(0) - \frac{1}{2}}$$

Nous avons donc un système de deux équations linéaires à deux inconnues ($\gamma(0)$ et $\gamma(1)$) :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \frac{2}{3}\gamma(1) + \frac{11}{12} \\ \gamma(1) = \frac{2}{3}\gamma(0) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

En substituant la seconde équation dans la première, on élimine $\gamma(1)$:

$$\gamma(0) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\gamma(0) - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{12}$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \frac{4}{9}\gamma(0) - \frac{1}{3} + \frac{11}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{9}\gamma(0) = \frac{7}{12}$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(0) = \frac{21}{20}}$$

puis $\gamma(1) = \frac{2}{3}\frac{21}{20} - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \frac{7}{10} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\gamma(1) = \frac{1}{5}}$$

(5) Pour $\gamma(2)$, c'est plus simple car les espérances des produits de y_{t-2} avec ε_t et ε_{t-1} sont nulles. On a donc

$$\gamma(2) = \frac{2}{3}\gamma(1)$$

c'est-à-dire :

$$\gamma(2) = \frac{2}{15}$$

(6) Plus généralement, on a :

$$\gamma(h) = \frac{2}{3}\gamma(h-1) \quad \forall\ h \geq 2$$

Exercice 4

(1) Le polynôme caractéristique associé à ce processus est

$$\chi(z) = z^2 - (\rho_1+\rho_2)z + \rho_1\rho_2$$

Le discriminant est

$$\Delta = (\rho_1+\rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta = (\rho_1-\rho_2)^2 > 0$$

Le polynôme caractéristique possède donc deux racines réelles distinctes :

$$z^* = \frac{\rho_1+\rho_2 \pm (\rho_1-\rho_2)}{2} = \begin{cases} z_1^* = \rho_1 \\ z_2^* = \rho_2 \end{cases}$$

Les deux racines du polynôme caractéristique sont donc inférieures à 1 en valeur absolue par hypothèse sur les paramètres ρ_1 et ρ_2. Le modèle est donc asymptotiquement stationnaire.

(2) En appliquant l'opérateur espérance à la définition du processus, on obtient :

$$\mu = c + (\rho_1+\rho_2)\mu - \rho_1\rho_2\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2)\mu = c$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{c}{1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2}}$$

(3) Vous trouverez la correction dans le cours ou sur mon site web pour le calcul de la fonction d'autocovariance. Le plus simple, pour calculer $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$, est de reparamétriser le

processus en posant $\varphi_1 = \rho_1 + \rho_2$ et $\varphi_2 = -\rho_1\rho_2$. Il est important de ne pas oublier de centrer le processus avant de se lancer dans les calculs (retirer la constante). À la fin vous devez trouver :

$$\gamma(0) = \frac{(1+\rho_1\rho_2)\,\sigma_\varepsilon^2}{(1-\rho_1\rho_2)(1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2)(1+\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)}$$

$$\gamma(1) = \frac{\rho_1+\rho_2}{1+\rho_1\rho_2}\,\gamma(0)$$

$$\gamma(2) = \left(\frac{(\rho_1+\rho_2)^2}{1+\rho_1\rho_2} - \rho_1\rho_2\right)\gamma(0)$$

(4) L'autocovariance d'ordre $h>2$ est donnée par

$$\gamma(h) = (\rho_1+\rho_2)\,\gamma(h-1) - \rho_1\rho_2\,\gamma(h-2)$$

(5) Le terme général de cette récurrence d'ordre 2 est construit à partir des racines du polynome caractéristique associé (qui se trouve être le même qu'en (1)) : ρ_1 et ρ_2.

On sait que le terme général est de la forme :

$$\gamma(h) = \alpha \rho_1^h + \beta \rho_2^h$$

où les paramètres inconnus α et β peuvent être identifié à partir des conditions initiales. On a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \gamma(0) \\ \alpha \rho_1 + \beta \rho_2 = \gamma(1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\rho_2 \gamma(0) - \gamma(1)}{\rho_2 - \rho_1} \\ \beta = \dfrac{\gamma(1) - \gamma(0)\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \end{cases}$$

Puisque $|\rho_1| < 1$ et $|\rho_2| < 1$, on a immédiatement

$$\lim_{h \to \infty} \gamma(h) = 0$$

La fonction d'autocovariance de ce processus AR(2) stationnaire tend vers 0 quand h tend vers l'infini. Ceci est vrai pour tout ARMA stationnaire.