

Processus Stochastique Stationnaire (1)

Définition Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires réelles $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$

L_D une série temporelle est une réalisation d'un processus stochastique.

• Pour caractériser un processus stochastique il faut spécifier la distribution jointe de

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N})$$

pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{Z}^N$ et

pour tout $N \in \mathbb{N}$, avec $t_i \neq t_j$ pour tout $i \neq j$

(2)
① On voit qu'il faut beaucoup d'information pour définir complètement un processus stochastique.

② Cela pose le problème de l'inférence. Comment pourrions estimer les paramètres d'un processus stochastique à partir d'une réalisation (c'est une série temporelle)?

③ Pour illustrer ce problème, on va considérer une classe plus réduite de processus stochastiques : les processus dit linéaires, au sens où les distributions jointes sont caractérisées par les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$$

$$\gamma(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$$

Exercice Montrer que l'on a aussi

(3)

$$\gamma(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s] - \mu_t \mu_s \quad \square$$

En effet, on a :

$$\gamma(t,s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$$

$$= \mathbb{E}[X_t X_s - X_t \mu_s - \mu_t X_s + \mu_t \mu_s]$$

$$= \mathbb{E}[X_t X_s] - \mathbb{E}[X_t \mu_s] - \mathbb{E}[\mu_t X_s] + \mathbb{E}[\mu_t \mu_s]$$

$$= \mathbb{E}[X_t X_s] - 2\mu_t \mu_s + \mu_t \mu_s$$

$$= \mathbb{E}[X_t X_s] - \mu_t \mu_s \quad \underline{\underline{cfd}}$$

Dans le reste du cours on travaillera pour l'essentiel avec des processus linéaires (sauf s'il nous reste du temps pour aborder des modèles non linéaires comme ceux utilisés sur des données financières).

④ Comment pouvons-nous estimer μ_t ? Si cela est possible...

Supposons que le processus stochastique décrive le diamètre d'un câble sortant d'une machine à intervalle régulier (chaque mètre par exemple).

Une série temporelle, c'est-à-dire une réalisation du processus stochastique, pourrait être une suite de mesures sur un câble de 1 km (soit 1000 observations).

Évidemment, on peut reprendre cela plusieurs fois, c'est-à-dire obtenir d'autres séries temporelles, en fabriquant d'autres câbles de 1 km avec la même

machine (qui est le processus stochastique). Notons

$$x_{j,t}$$

le diamètre câble j au t -ieme metre. Si avec la même machine nous fabriquons K câbles, nous pouvons alors estimer μ_t de la façon suivante :

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K x_{j,t}$$

Nous pourrions procéder de la même façon pour les moments d'ordre 2 (covariance).

Il est donc possible d'inférer les caractéristiques du processus stochastique si nous disposons

de plusieurs réalisations de processus stochastique.

Malheureusement, ce qui est possible pour un ingénieur mesurant l'output d'une machine, n'est généralement pas possible pour un économiste :

→ Nous n'observons pas qu'une série temporelle pour le PIB...

Nous ne pouvons pas arrêter l'économie puis remonter dans le temps pour obtenir une nouvelle série de PIB !

Avec une seule réalisation du processus stochastique, il n'est clairement pas possible d'estimer

les caractéristiques du processus stochastique. ⑦

La seule façon de s'en sortir est de restreindre (encore) la classe des processus stochastiques sur laquelle nous travaillons. Par la suite on s'intéressera à des processus dont les moments d'ordre 1 et 2 ne dépendent pas du temps, afin de rendre l'inférence possible quand on ne dispose que d'une seule réalisation du processus stochastique.

↳ on parle alors de processus stationnaire.

(8)

Définition Le processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est stationnaire si et seulement si la distribution jointe de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ est identique à la distribution jointe de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, avec $t_i \neq t_j$ pour $i \neq j$.

↳ La distribution jointe est invariante dans le temps

Mais si nous nous intéressons seulement aux processus stochastiques linéaires, nous n'avons pas besoin d'une définition si générale.

Définition le processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit stationnaire au second ordre si et seulement si ses moments d'ordre 1 et 2 sont invariants :

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu \quad \forall t$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \sigma_x^2 < \infty \quad \forall t$$

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$$

Remarque Un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire au second ordre appartient à l'espace des variables aléatoires de carré intégrable (L_2). La norme dans cet espace est définie par

$$\|X\| = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

Remarque On a

(10)

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h) \quad \forall t$$

Si le processus est stationnaire au second ordre alors la covariance ne dépend pas du temps mais seulement de la «distance» entre X_t et X_s .

En nous restreignant au processus stochastiques stationnaires nous avons considérablement diminué le nombre de paramètres à estimer.

Mais pour que nous puissions véritablement estimer les paramètres (par exemple l'espérance), il faut aussi que le processus soit

ergodique, ce qui sera le cas ⁽¹¹⁾
pour les modèles considérés par la
suite.

Le concept d'ergodicité est techniquement
assez difficile à discuter, mais
grosso modo l'idée est que des
variables aléatoires doivent être
d'autant moins corrélées qu'elles
sont éloignées dans le temps. De
sorte qu'en calculant une moyenne
empirique sur une série temporelle
de nouvelles informations
apportent de l'information et
réduisent ainsi la variance
de l'estimateur.

Par exemple, si on utilise une (12)
moyenne empirique pour estimer
l'espérance constante de processus
stochastique

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t$$

alors

$$\mathbb{E}[\bar{x}_N] = \mu$$

et surtout

$$V[\bar{x}_N] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

assurant la convergence de \bar{x}_N
vers μ . Pour que cela soit
possible il faut (mais ne
suffit pas) que la fonction
d'autocovariance, $\gamma(h)$, tende
suffisamment rapidement vers 0
quand $h \rightarrow \infty$.

(1) Moments d'un processus stochastique stationnaire (13)

On note

$$\gamma_x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$h \mapsto \gamma_x(h)$$

la fonction d'autocovariance d'un processus stochastique stationnaire au second ordre.

Propriétés

(i) la fonction d'autocovariance est paire : $\gamma(-h) = \gamma(h) \forall h \in \mathbb{Z}$

(ii) la fonction d'autocovariance est positive

① Pour la parité, il suffit de remarquer que

(14)

$$\begin{aligned}\gamma(-h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_x)(X_{t+h} - \mu_x)] \\ &= \mathbb{E}[(X_{t+h} - \mu_x)(X_t - \mu_x)] \\ &= \gamma(h)\end{aligned}$$

② Dire que la fonction d'autocovariance est positive ne veut évidemment pas dire que $\gamma(h)$ est positif pour tout h . Cette propriété découle de la positivité de la variance. On sait que

$$\forall \left[\sum_{i=1}^N a_i X_{t_i} \right] > 0$$

Supposons sans perte de généralité que $\mathbb{E}[X_{t_i}] = 0 \quad \forall i$. Nous avons alors par définition de la

variance:

$$\begin{aligned}
 V \left[\sum_{i=1}^N a_i X_{t_i} \right] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i X_{t_i} \right)^2 \right] \\
 &= E \left[\left(\sum_{j=1}^N a_j X_{t_j} \right) \left(\sum_{k=1}^N a_k X_{t_k} \right) \right] \\
 &= E \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k X_{t_j} X_{t_k} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k E \left[X_{t_j} X_{t_k} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \gamma(t_j - t_k)
 \end{aligned}$$

La double somme doit être strictement positive pour tout vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ différent de zéro. C'est en ce sens que la fonction d'autocovariance est dite positive.

À partir d'un processus stochastique (16)
on peut facilement construire d'autres
processus stochastiques.

Théorème Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus
stochastique stationnaire et si
 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite de nombres
réels absolument sommable :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < +\infty$$

alors

$$Y_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i X_{t-i}$$

définit un nouveau processus
stochastique stationnaire.

Éléments de preuve

-(17)-

• Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est de carré intégrable alors il en va de même pour $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$. En effet:

$$\begin{aligned}\|Y_t\|_2 &= \left\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{t-i} \right\|_2 \\ &< \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|a_i X_{t-i}\|_2 \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| \cdot \|X_{t-i}\|_2 \\ &= (\gamma_x(0) + \mu_x^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| \\ &\qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}} < +\infty\end{aligned}$$

Ainsi $\|Y_t\|_2 < \infty$

• L'espérance de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{t-i}\right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathbb{E}[X_{t-i}]\end{aligned}$$

 Possible car $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est absolument sommable

$$= \mu_x \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \equiv \mu_y \quad (18)$$

• La fonction d'autocovariance de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{t-i}, \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{t-h-i}\right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_i a_j \text{Cov}(X_{t-i}, X_{t-h-j}) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_i a_j \gamma_x(h+i-j) \equiv \gamma_y(h) \end{aligned}$$

les moments d'ordre 1 et 2 sont
bien indépendants du temps \Rightarrow

Exemple Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ une
suite de variable aléatoires
indépendamment et identiquement
distribuées (bruit blanc) avec :

$$\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \forall t$$

(19)

$$V[X_t] = \sigma_x^2 \quad \forall t$$

$$\text{et } \gamma(h) = 0 \quad \forall h \neq 0$$

Ce processus stochastique est stationnaire.
Définissons un nouveau processus stochastique

$$Y_t = \alpha X_t + \beta X_{t-1} \quad \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \end{array}$$

vous avez donc (en termes de notation du théorème):

$$a_0 = \alpha$$

$$a_1 = \beta$$

$$a_i = 0 \quad \forall i \neq \{0, 1\}$$

On montre facilement qu'il s'agit d'un processus stochastique stationnaire au second ordre.

• Son espérance est nulle $\forall t$

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\alpha X_t + \beta X_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \alpha \mathbb{E}[X_t] + \beta \mathbb{E}[X_{t-1}]$$

(20)

$$\boxed{L_D \mid \mathbb{E}[Y_t] = 0} \quad \forall t$$

• Sa variance est finie (et constante):

$$V[Y_t] = V[\alpha X_t + \beta X_{t-1}] \quad \text{car } \mathbb{E}[Y_t] = 0$$

$$\Leftrightarrow V[Y_t] = \mathbb{E}[(\alpha X_t + \beta X_{t-1})^2]$$

$$\Leftrightarrow V[Y_t] = \mathbb{E}[\alpha^2 X_t^2 + \beta^2 X_{t-1}^2 + 2\alpha\beta X_t X_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow V[Y_t] = \alpha^2 \mathbb{E}[X_t^2] + \beta^2 \mathbb{E}[X_{t-1}^2] + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X_t X_{t-1}]$$

Comme la covariance entre X_t et X_{t-1} est nulle (indépendance), on a donc:

$$V[Y_t] = \alpha^2 \mathbb{E}[X_t^2] + \beta^2 \mathbb{E}[X_{t-1}^2]$$

$$\Leftrightarrow V[Y_t] = (\alpha^2 + \beta^2) \mathbb{E}[X_t^2] \quad \text{stationnaire}$$

et donc

(20)

$$\boxed{V[Y_t] = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma_x^2} \quad \forall t$$

• Calculons la fonction d'auto-covariance

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) \\ &= \text{Cov}(\alpha X_t + \beta X_{t-1}, \alpha X_{t-h} + \beta X_{t-h-1}) \\ &= \alpha^2 \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) + \beta^2 \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-h-1}) \\ &\quad + \alpha\beta \text{Cov}(X_t, X_{t-h-1}) + \alpha\beta \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-h}) \end{aligned}$$

$\neq 0$ ssi $h=0$

$\neq 0$ ssi $h=-1$

$\neq 0$ ssi $h=1$

Au total, nous avons donc

$$\gamma_Y(h) = \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)\sigma_x^2 & \text{si } h=0 \\ \alpha\beta\sigma_x^2 & \text{si } h \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est bien un processus stochastique stationnaire au second ordre.

On note que contrairement au processus d'origine $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ admet de la dépendance (relativement limitée): la covariance entre Y_t et Y_{t-1} est non nulle. 

Définition Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stochastique stationnaire au second ordre, alors on appellera innovation linéaire du processus en t la variable $X_t - X_t^*$, où X_t^* est la régression affine de X_t sur son passé $(X_s, s \leq t-1)$

X_t^* est la meilleure prévision (linéaire) de X_t basée sur l'ensemble d'information $I_t = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$

Par construction l'innovation est non corrélée avec le passé de X , elle

peut être interprétée comme une erreur de prévision

► On peut montrer que si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stochastique stationnaire au second ordre, alors son innovation est un bruit blanc.

Définition La fonction d'autocorrélation est définie par

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Remarque $\rho(h)$ mesure la corrélation entre X_t et X_{t+h} (ou X_{t-h})

$$\rho(h) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{V[X_t]} \sqrt{V[X_{t+h}]}} = \frac{\gamma(-h)}{\sqrt{\gamma(0)\gamma(0)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Remarque La fonction d'autocorrélation ⁽²⁴⁾ est juste une normalisation de la fonction d'autocovariance. Elle hérite donc de ses propriétés :

- $\rho(h)$ est une fonction paire
- $\rho(h)$ est une fonction positive

Exemple Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc. On définit le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$:

$$X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-12}$$

La fonction d'autocovariance est :

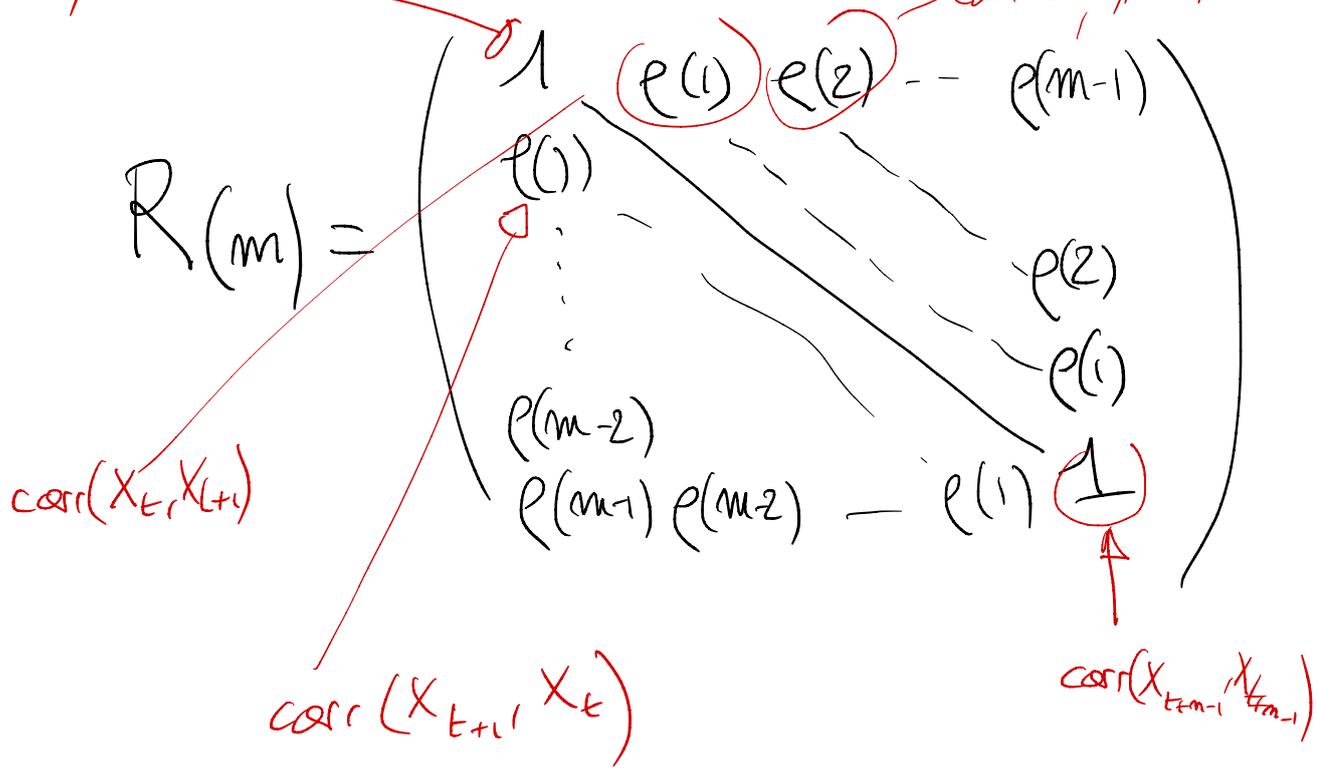
$$\gamma(h) = \begin{cases} 2\sigma^2 & \text{si } h=0 \\ -\sigma^2 & \text{si } h=\pm 12 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction d'autocorrélation est donc :

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h=0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h=\pm 12 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition La matrice d'autocorrélation d'ordre m contient les corrélations entre m X

successifs: $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+m-1}$.



La positivité de la fonction $\rho(h)$
 \Leftrightarrow $R(m)$ est une matrice définie positive pour tout m

$\forall a \in \mathbb{R}^m$ non nul $\rightarrow R(m)$ définie positive

$$a' R(m) a > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i a_j \rho(i-j) > 0$$

théorème $|R(m)| > 0 \quad \forall m \geq 1$

$$\bullet |R(1)| > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \rho^{(1)} \\ \rho^{(1)} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \rho^{(1)2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \rho^{(1)2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-1 < \rho^{(1)} < 1}$$

L'autocorrélation d'ordre 1 doit strictement inférieure à 1 en valeur absolue.

$$\bullet |R(2)| > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \rho^{(1)} & \rho^{(2)} \\ \rho^{(1)} & 1 & \rho^{(1)} \\ \rho^{(2)} & \rho^{(1)} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\rho^{(1)2}\rho^{(2)} - \rho^{(2)2} - \rho^{(1)2} - \rho^{(1)2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \rho^{(2)})(1 + \rho^{(2)}) + 2\rho^{(1)2}(\rho^{(2)} - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\rho(2))(1+\rho(2)) - 2\rho(1)^2(1-\rho(2)) > 0$$

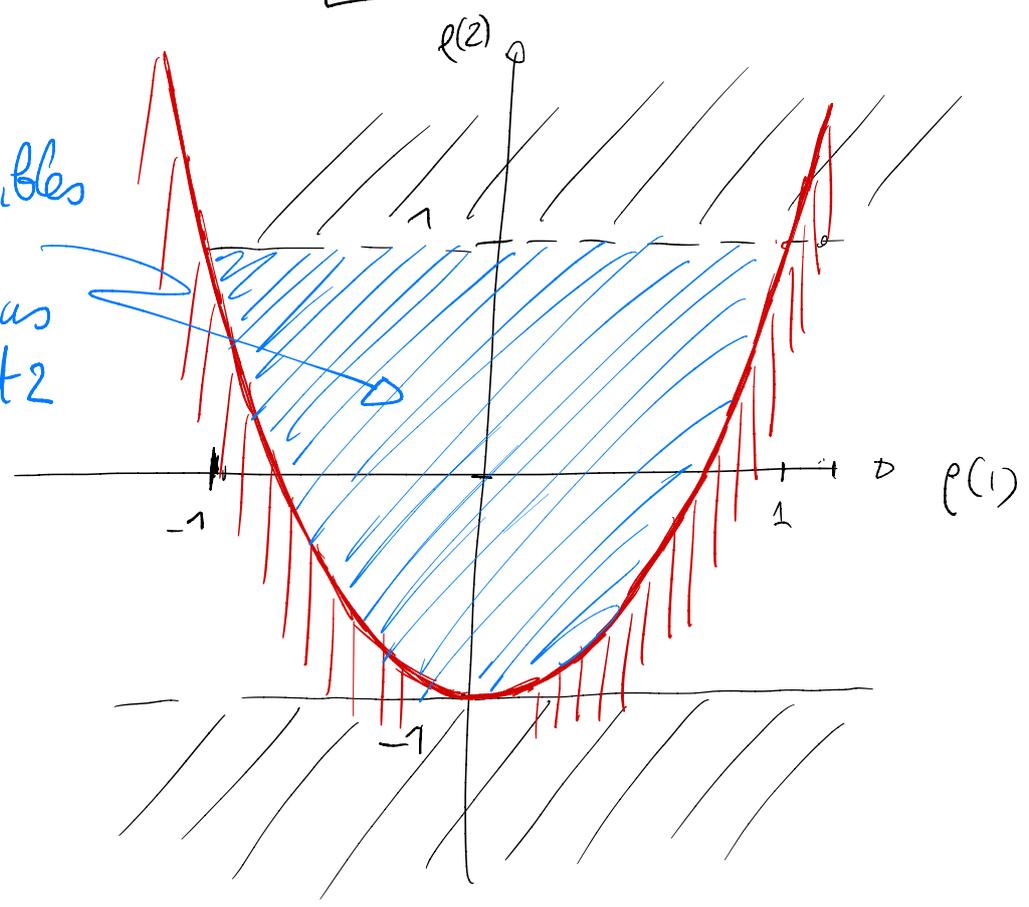
$$\Leftrightarrow (1-\rho(2))(1+\rho(2) - 2\rho(1)^2) > 0$$

Puisqu'une corrélation est forcément plus petite que 1 (et donc $1-\rho(2) > 0$), on doit donc avoir

$$1+\rho(2) - 2\rho(1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho(2) > 2\rho(1)^2 - 1}$$

valeurs possibles pour les autocorrélations d'ordre 1 et 2



AUTO CORRELATION PARTIELLE

- + Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique
- + On suppose que les matrices d'autocorrelation sont de plein rang.
- + On suppose que l'espérance de X_t est nulle pour simplifier les notations.
- + On s'intéresse à la meilleure prédiction affine de X_t étant données les k valeurs précédentes: $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}$

$$L_D \mathbb{E}[X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-k}] = a_1(k)X_{t-1} + a_2(k)X_{t-2} + \dots + a_k(k)X_{t-k}$$

où le vecteur $\mathbf{a}(k) \equiv (a_1(k), a_2(k), \dots, a_k(k))'$ des coefficients est donné par

$$\mathbf{a}(k) = \mathbf{R}(k)^{-1} \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(k) \end{pmatrix}$$

Si on part de l'expression de l'estimateur des MCO on devrait avoir

$$a(k) = \Gamma(k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(k) \end{pmatrix}$$

↖
inverse de la
matrice des autocovariances

$$\Gamma(k) = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(k-1) \\ & \gamma(1) & & \gamma(k-1) \\ & & \ddots & \gamma(1) \\ & & & \gamma(0) \\ \gamma(k-1) & \dots & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire la variance
de $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k})'$.

Notons $\gamma_0 = \gamma_0 \mathbf{I}_k$, on a alors :

$$a(k) = \underbrace{\Gamma(k)^{-1} \gamma_0 \gamma_0^{-1}}_{\substack{= \\ R(k)}} \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(k) \end{pmatrix}$$

(30)

Définition Le coefficient de corrélation partielle

$$r(k) = a_k(k)$$

mesure le lien entre X_t et X_{t-k} une fois que l'on a purgé l'effet de $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$

Remarque Les fonctions d'autocorrélation, $\rho(k)$, et d'autocorrélation partielle, $r(k)$ sont équivalentes.

• En effet, on a vu par construction que $r(k)$ est une fonction de $\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(k)$.

• Dans l'autre sens on peut voir que l'on peut déduire $\rho(k)$ de $r(1), r(2), \dots, r(k)$. C'est évident pour $k=1$ puisque $a_1(1) = r(1) = \rho(1)$.

$$R(k) = \begin{pmatrix} R(k-1) & p^{(k-1)} \\ & p^{(k-2)} \\ & \vdots \\ & p^{(1)} \\ p^{(k-1)} \dots p^{(1)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(k) \begin{pmatrix} a_1(k) \\ a_2(k) \\ \vdots \\ a_k(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \\ \vdots \\ p^{(k)} \end{pmatrix}$$

Partition

$$\Rightarrow R(k-1) \begin{pmatrix} a_1(k) \\ a_2(k) \\ \vdots \\ a_{k-1}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p^{(k-1)} \\ p^{(k-2)} \\ \vdots \\ p^{(1)} \end{pmatrix} a_k(k) = \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \\ \vdots \\ p^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (**)$$

et (la dernière ligne)

$$\underbrace{(p^{(k-1)}, p^{(k-2)}, \dots, p^{(1)})}_{\text{recurrence}} \begin{pmatrix} a_1(k) \\ a_2(k) \\ \vdots \\ a_{k-1}(k) \end{pmatrix} + a_k(k) = p^{(k)} \quad (**)$$

↑ l'expression de l'autocorrélation en fonction de l'autocorrélation partielle.

On peut donner une expression explicite de l'autocorrélation partielle $r(k)$ en exploitant la structure par bloc.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1(k) \\ a_2(k) \\ \vdots \\ a_{k-1}(k) \end{pmatrix} = R(k-1)^{-1} \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(k-1) \end{pmatrix} - R(k-1)^{-1} \begin{pmatrix} e(k-1) \\ e(k-2) \\ \vdots \\ e(1) \end{pmatrix} r(k)$$

En substituant dans (**):

$$r(k) = \frac{e(k) - (e(k-1), e(k-2), \dots, e(1)) R(k-1)^{-1} \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(k-1) \end{pmatrix}}{1 - (e(k-1), e(k-2), \dots, e(1)) R(k-1)^{-1} \begin{pmatrix} e(k-1) \\ e(k-2) \\ \vdots \\ e(1) \end{pmatrix}}$$

Exemple

- $r(1) = \rho(1)$
- $r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$

(2) Densité spectrale

Une façon alternative de caractériser un processus stochastique est d'étudier la densité spectrale, ou verser que cette approche est équivalente à la fonction d'autocovariance -

Plutôt que d'aborder un processus stochastique dans le domaine du temps ou s'intéresse au domaine des fréquences.

Dans la suite on s'intéresse à un processus stochastique de la forme

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim \text{BB}(\sigma^2)$ et

$(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite absolument sommable :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$$

On verra plus loin qu'il s'agit d'un processus très général et qu'il permet de représenter tout les processus stochastiques linéaires stationnaires au second ordre.

On peut calculer la fonction d'autocovariance de ce processus et montrer qu'elle est absolument sommable.

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) &= \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] \\
 &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t+h-j}\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_i a_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}\right] \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_i a_j \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}] \\
 &\quad \begin{aligned} & t-i = t+h-j \\ \Rightarrow & i = j-h \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j-h}$$

Cette fonction vérifie

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$$

En effet

(36)

$$\begin{aligned}\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| &= \sigma_{\Sigma}^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{i-h} \right| \\ &\leq \sigma_{\Sigma}^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| |a_{i-h}| \\ &= \sigma_{\Sigma}^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| \right)^2 < \infty\end{aligned}$$

car $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est absolument sommable.

Définition La densité spectrale du processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est la fonction réelle définie par :

fréquence \searrow

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{i\omega h}$$

pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

Cette fonction existe car $\gamma(h)$ est absolument sommable.

Montrons que cette fonction est bien à valeurs dans \mathbb{R} . (37)

$$f_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) (e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}) \right)$$

$$\Rightarrow f_x(\omega) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos(\omega h)$$

On a donc :

$$f_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) \cos(\omega h)$$

La densité spectrale est une fonction continue et périodique. Elle est aussi symétrique (par rapport à zéro), c'est pourquoi on ne l'étudie généralement que sur l'intervalle $[0, \pi]$

On pourrait aussi montrer que cette fonction est positive. (38)

Théorème La densité spectrale et la fonction d'autocovariance sont équivalentes.

Preuve Nous savons déjà passer de la fonction d'autocovariance à la densité spectrale, en utilisant sa définition. On peut montrer, dans l'autre sens, que :

$$\gamma_x(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\omega) \cos(\omega h) d\omega$$

En effet, nous avons

(38)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\omega) \cos(\omega h) d\omega &= 2 \int_0^{\pi} f_X(\omega) \cos(\omega h) d\omega \\ \cos(\omega h) &= \frac{e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}}{2} \\ &= \int_0^{\pi} f_X(\omega) [e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}] d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\omega) e^{-i\omega h} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) e^{i\omega j} e^{-i\omega h} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(h-j)} d\omega \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(h-j)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{si } j=h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega x} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \omega x d\omega + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega x d\omega \\ &= \left[\frac{1}{x} \sin(\omega x) \right]_{-\pi}^{\pi} - i \left[\frac{1}{x} \cos(\omega x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc finalement

(40)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\omega) e^{-i\omega h} d\omega = \gamma_x(h)$$

ou encore

$$\gamma_x(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\omega) \cos(\omega h) d\omega$$

nous pouvons donc bien passer de la densité spectrale à la fonction d'autocovariance. 

En particulier nous avons une expression de la variance comme une intégrale de la densité spectrale :

$$\gamma_x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\omega) d\omega$$

(41)

Plus généralement, comme la densité spectrale est une fonction positive, nous pourrions aussi calculer (pour $0 < \alpha < \pi$):

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_x(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\alpha} f_x(\omega) d\omega$$

et cette intégrale doit être positive.

Cela nous donne la contribution des fréquences inférieures à α à la volatilité (variance) de $(X_t, t \in \mathbb{Z})$.

Exemple. Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ une suite de variables aléatoires I.I.D d'espérance nulle et de variance σ_x^2 . Il s'agit d'un bruit blanc.

↳ La fonction d'autocovariance est
$$\gamma_x(h) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{si } h=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité spectrale est donc

(42)

$$f_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \gamma(\omega)$$

$$\Leftrightarrow f_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{2\pi}$$

La densité spectrale est constante
(c'est-à-dire elle ne dépend pas de la
fréquence ω)

→ Toutes les fréquences contribuent
également à la variance du
processus stochastique

→ C'est pourquoi on parle de
bruit blanc (analogie avec les
couleurs). 

(43)

Exemple Dans l'autre sens, on peut montrer que si la densité spectrale est plate, alors le processus associé est forcément un bruit blanc.

Supposons que

$$f_x(\omega) = \alpha > 0$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma_x(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} \alpha \cos(\omega h) d\omega \\ &= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega h) d\omega \\ &= \begin{cases} \alpha \cdot 2\pi & \text{si } h=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est bien un bruit blanc de variance $2\pi\alpha$. \blacksquare

Théorème Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire de second ordre dont la densité spectrale est $f_x(\omega)$. Soit $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique défini par

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}$$

où $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une suite absolument sommable

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$$

Alors

$$f_Y(\omega) = f_x(\omega) \cdot \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\omega j} \right|^2$$

Preuve On a déjà montré que le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ doit être lui aussi stationnaire au second ordre, que sa fonction d'autocovariance est:

$$\gamma_Y(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \gamma_X(h+j-k)$$

et qu'elle est absolument sommable

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_Y(h)| < \infty$$

La densité spectrale de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est définie par :

$$f_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_Y(h) e^{i\omega h}$$

$$\Leftrightarrow f_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \gamma_X(h+j-k) e^{i\omega h}$$

$$\Leftrightarrow f_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\omega k} \underbrace{\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_X(h+j-k) e^{i\omega(h+j-k)}}_{f_X(\omega)}$$

$$\Rightarrow f_y(\omega) = \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\omega j} \right|^2 \cdot f_x(\omega)$$

(46)

(3) Opérateur retard (et avance)

L'opérateur retard L transforme un processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ en un processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ tel que

$$y_t = L x_t = x_{t-1}$$

Cet opérateur est linéaire et inversible. Son inverse est l'opérateur F qui transforme un processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ en

un processus $(z_t, t \in \mathbb{Z})$ tel que (47)

$$z_t = F x_t = x_{t+1}$$

Il s'agit de l'opérateur
avance, par construction

On a

$$L.F = F.L = 1$$

En appliquant plusieurs fois
l'opérateur retard, on obtient

$$L^n x_t = x_{t-n}$$

Plus généralement on peut définir
des polynômes en L

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i L^i \right) x_t = \sum_{i=1}^n a_i x_{t-i}$$

On peut aussi définir des séries en L (ou F). On doit bien sûr se restreindre à des processus stationnaires, pour que cela ait un sens. (48)

Nous savons que si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stationnaire au second ordre et $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite absolument sommable, c'est-à-dire telle que :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$$

alors le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par :

$$Y_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{t-i}$$

est aussi un processus stationnaire (49)
au second ordre.

Dans ce cas, on peut définir
la série en l'opérateur retard L :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i$$

Cette série permet de
transformer $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ en
 $(y_t, t \in \mathbb{Z})$.

Propriété 1 Somme de séries en L

Si $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont deux
suites absolument sommables,

alors

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i L^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i + b_i) L^i$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i L^i \right) \mathcal{X}_t &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i \mathcal{X}_t + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i L^i \mathcal{X}_t \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathcal{X}_{t-i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \mathcal{X}_{t-i} \\
 &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=-m}^n a_i \mathcal{X}_{t-i} + \sum_{i=-m}^n b_i \mathcal{X}_{t-i} \right) \\
 &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=-m}^n (a_i + b_i) \mathcal{X}_{t-i}
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Notons que la suite $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ dont le terme général est défini par

$$c_i = a_i + b_i$$

est absolument sommable. En effet,

nous avons :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_i| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i + b_i| < \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| + \sum_{i=-\infty}^{\infty} |b_i| < \infty$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i L^i \right) \mathcal{X}_t &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i + b_i) \mathcal{X}_{t-i} \\
 &= \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i + b_i) L^i \right) \mathcal{X}_t
 \end{aligned}$$

caft

Propriété 2 Le produit de deux séries en L est une série en L .

(51)

Ou a

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j L^j \right) \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i \right) \mathcal{X}_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{k-i} \right) L^k \mathcal{X}_t$$

Lemme

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j L^j \right) \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i \right) \mathcal{X}_t = \lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ r, s \rightarrow \infty}} \left(\sum_{j=-m}^n b_j L^j \right) \left(\sum_{i=-r}^s a_i L^i \right) \mathcal{X}_t$$

Preuve du lemme

Notons

$$S_{n,m} = \sum_{j=-m}^n b_j L^j, \quad S = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j L^j$$

$$\tilde{S}_{s,r} = \sum_{i=-r}^s a_i L^i, \quad \tilde{S} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i$$

$$\begin{aligned} \| S \tilde{S} \mathcal{X}_t - S_{n,m} \tilde{S}_{s,r} \mathcal{X}_t \| &= \| S \tilde{S} \mathcal{X}_t - S_{n,m} \tilde{S} \mathcal{X}_t + S_{n,m} \tilde{S} \mathcal{X}_t - S_{n,m} \tilde{S}_{s,r} \mathcal{X}_t \| \\ &\leq \| S \tilde{S} \mathcal{X}_t - S_{n,m} \tilde{S} \mathcal{X}_t \| + \| S_{n,m} \tilde{S} \mathcal{X}_t - S_{n,m} \tilde{S}_{s,r} \mathcal{X}_t \| \\ &= \| S \tilde{S} \mathcal{X}_t - S_{n,m} \tilde{S} \mathcal{X}_t \| + \| S_{n,m} (\tilde{S} \mathcal{X}_t - \tilde{S}_{s,r} \mathcal{X}_t) \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|S\tilde{S}x_t - S_{n,m}\tilde{S}x_t\| + \|S_{n,m}\| \cdot \|\tilde{S}x_t - \tilde{S}_{s,n}x_t\| \quad (52) \\
&\leq \|S\tilde{S}x_t - S_{n,m}\tilde{S}x_t\| + \left(\sum_{j=-m}^n |a_j|\right) \|\tilde{S}x_t - \tilde{S}_{s,n}x_t\| \\
&\leq \|(S - S_{n,m})\tilde{S}x_t\| + \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|\right) \|\tilde{S}x_t - \tilde{S}_{s,n}x_t\|
\end{aligned}$$

En notant que

$$S y_t = \lim_{n,m \rightarrow \infty} S_{n,m} y_t$$

limites
au sens
de L_2

$$\text{et } \tilde{S}x_t = \lim_{r,s \rightarrow \infty} \tilde{S}_{r,s}x_t$$

On a donc

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|(S - S_{n,m})\tilde{S}x_t\| = 0$$

$$\text{et } \lim_{r,s \rightarrow \infty} \|\tilde{S}x_t - \tilde{S}_{r,s}x_t\| = 0$$

D'où finalement:

(53)

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ r, s \rightarrow \infty}} \| \tilde{S} \tilde{S} x_t - S_{n, m} \tilde{S}_{r, s} x_t \| = 0$$

cgfd

Preuve de la propriété 2

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j L^j \right) \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i L^i \right) x_t$$

$$= \lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ r, s \rightarrow \infty}} \left(\sum_{j=-m}^n b_j L^j \right) \left(\sum_{i=-r}^s a_i L^i \right) x_t$$

$$= \lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ r, s \rightarrow \infty}} \sum_{j=-m}^n \sum_{i=-r}^s b_j a_i L^{i+j} x_t$$

$$= \lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ r, s \rightarrow \infty}} \sum_{k=-m-r}^{n+s} \sum_i a_i b_{k-i} L^k x_t$$

$$\begin{aligned} k &= i+j \\ j &= k-i \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{k-i} \right)}_{c_k} L^k x_t$$

où $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite absolument sommable.

cgfd

Inversion des polynôme retard $1-\lambda L$

(54)

On peut montrer que le polynôme retard $\chi(L) = 1 - \lambda L$ est inversible dès lors que $|\lambda| \neq 1$.

S: $|\lambda| < 1$

Possus

$$a_i = \begin{cases} \lambda^i & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est absolument sommable, la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i$$

est donc définie. En multipliant par $\chi(L)$, il vient

$$\begin{aligned} \chi(L) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i &= (1 - \lambda L) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i - \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(L) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+1} L^i \quad (55)$$

$$\Rightarrow X(L) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i L^i$$

$$\Rightarrow X(L) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i = \underline{1}$$

Ainsi $X(L)$ est inversible et son inverse est

$$(1 - \lambda L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i$$

Interprétation Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire au second ordre, alors le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i}$$

est l'unique processus stationnaire au second ordre solution de l'équation

$$\underbrace{Z_t - \lambda Z_{t-1}}_{(1-\lambda L)Z_t} = X_t$$



Il existe d'autres solutions (une infinité), mais elles ne sont pas stationnaires au second ordre.

Analogie (avec une suite déterministe)
Soit la suite définie par la récurrence :

$$u_n = \lambda u_{n-1} + b$$

La solution générale de cette équation récurrente est

$$u_n = A\lambda^n + \frac{b}{1-\lambda}$$

Il y a autant de solutions que de valeurs possibles de la constante A. Il existe qu'une seule solution constante (stationnaire) que nous obtenons pour A=0

$$u^* = \frac{b}{1-\lambda}$$

l'état stationnaire.

Si $|\lambda| > 1$ On a :

$$1 - \lambda L = -\lambda L \left(1 - \frac{1}{\lambda} F\right)$$

où F est l'opérateur avance. L'inverse de $-\lambda L$ est égal (par définition) à $-\lambda^{-1} F$. Puisque $|\lambda| > 1$, nous avons $|\lambda^{-1}| < 1$ et la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} F^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} L^{-i}$$

existe donc et est l'inverse du polynôme avance $1 - \frac{1}{\lambda} F$. Le polynôme retard $1 - \lambda L$ est donc le produit de deux polynômes inversibles. Son inverse est

$$(1 - \lambda L)^{-1} = (-\lambda L)^{-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda} F\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
(\Rightarrow) (1-\lambda L)^{-1} &= \left(-\frac{1}{\lambda} F\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} F^i\right) \\
&= -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} F^{i+1} \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} F^i
\end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) (1-\lambda L)^{-1} = -\sum_{i=-1}^{-\infty} \lambda^i L^i$$

Si $|\lambda|=1$ le polynôme retard n'est pas inversible.

Inversion d'un polynôme d'ordre p

Soit la fonction polynomiale

$$\phi(z) = 1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \dots + \phi_p z^p$$

dont les racines $z_j = \frac{1}{\lambda_j}$ sont plus grandes que 1 en module.

Il existe une série

$$\psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i$$

telle que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$$

$$\text{et } \phi(z) \psi(z) = 1$$

Etant donnée les propriétés de l'opérateur retard, on déduit que le polynôme retard

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

est inversible et admet pour
inverse $\psi(L)$. (60)

Plusieurs approches sont envisageables pour inverser le polynôme. La plus évidente est de factoriser le polynôme en un produit de polynômes d'ordre 1 que nous savons inverser. Cela exige de calculer les racines du polynôme (pas toujours simple) et de traiter le cas des racines complexes conjuguées. Une approche plus simple est de procéder par identification de façon récursive.

En effet, nous devons avoir

(61)

$$(1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \dots + \phi_p z^p) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \dots + \phi_p z^p) (\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \dots) = 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \psi_0 + (\psi_0 \phi_1 + \psi_1) z + (\psi_0 \phi_2 + \psi_1 \phi_1 + \psi_2) z^2 \\ & + \dots \\ & + (\psi_p + \phi_1 \psi_{p-1} + \dots + \phi_{p-1} \psi_1 + \phi_p) z^p \\ & \vdots \\ & + (\psi_n + \phi_1 \psi_{n-1} + \dots + \phi_{p-1} \psi_{n-p+1} + \phi_p \psi_{n-p}) z^n \\ & \vdots \\ & = \underline{1} \end{aligned}$$

Par identification

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 + \phi_1 = 0 \\ \psi_2 + \phi_1 \psi_1 + \phi_2 = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$