(2.3) Modèle AR(p)

Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$, le processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus autorégressif d'ordre $p < \infty$ si :

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

avec c et $(\varphi_i)_{i=1}^{p}$ des paramètres réels.

Le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre si

+ les racines du polynôme retard

$$\Theta(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \dots - \varphi_p z^p$$

sont plus grandes que 1 en module

+ les racines du polynôme caractéristique

$$\chi(z) = z^p - \varphi_1 z^{p-1} - \varphi_2 z^{p-2} - \dots - \varphi_{p-1} z - \varphi_p$$

sont plus petites que 1 en module.

Remarque 1 Il n'est plus possible d'obtenir de façon générale des restrictions sur les paramètres autorégressifs pour assurer la stabilité du processus AR(p). Il faut vérifier au cas par cas en calculant les racines du polynôme retard ou du polynôme caractéristique.

Sous l'hypothèse de stationnarité au second ordre, calculons les moments d'ordre 1 et 2.

Espérance $Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2}] + \dots + \varphi_p \mathbb{E}[Y_{t-p}]$$

$$\overset{\text{stationnarité}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_t] + \varphi_2 \mathbb{E}[Y_t] + \dots + \varphi_p \mathbb{E}[Y_t]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p} = \mu$$

Autocovariance

Commençons par centrer le processus en définissant $Z_t = Y_t - \mu$. Nous avons

$$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t = \mu(1-\varphi_1 - \cdots - \varphi_p) + \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t - \mu = \varphi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \cdots + \varphi_p (Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \cdots + \varphi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$$

L'autocovariance d'ordre h est définie par :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)\right] = \mathbb{E}\left[Z_t Z_{t-h}\right]$$

Pour tout h on a :

$$Z_t Z_{t-h} = \varphi_1 Z_{t-1} Z_{t-h} + \cdots + \varphi_p Z_{t-p} Z_{t-h} + Z_{t-h} \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \cdots + \varphi_p \gamma(h-p) + \mathbb{E}\left[\varepsilon_t Z_{t-h}\right]$$

avec $\mathbb{E}\left[\varepsilon_t Z_{t-h}\right] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (car ε_t est indépendant du passé de Z

On obtient la fonction d'autocovariance en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(1) + \cdots + \varphi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma(1) = \varphi_1 \gamma(0) + \varphi_2 \gamma(1) + \cdots + \varphi_p \gamma(p-1) \\ \quad \vdots \\ \gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \varphi_2 \gamma(h-2) + \cdots + \varphi_p \gamma(h-p) \\ \quad \vdots \\ \gamma(p) = \varphi_1 \gamma(p-1) + \varphi_2 \gamma(p-2) + \cdots + \varphi_p \gamma(0) \end{cases}$$

les termes suivant sont obtenus par récurrence.

AR(p) autocovariance function

The autocovariance function of a finite order autoregressive process, as defined in AR-p, must solve:

$$\begin{cases} \gamma_y(0) & = \varphi_1 \gamma_y(1) + \varphi_2 \gamma_y(2) + \cdots + \varphi_p \gamma_y(p) + \sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_y(1) & = \varphi_1 \gamma_y(0) + \varphi_2 \gamma_y(1) + \cdots + \varphi_p \gamma_y(p-1) \\ & \vdots \\ \gamma_y(h) & = \varphi_1 \gamma_y(h-1) + \varphi_2 \gamma_y(h-2) + \cdots + \varphi_p \gamma_y(h-p) \\ & \vdots \\ \gamma_y(p) & = \varphi_1 \gamma_y(p-1) + \varphi_2 \gamma_y(p-2) + \cdots + \varphi_p \gamma_y(0) \end{cases}$$

And for $|h| > p$ we use the following recursion:

$$\gamma_y(h) = \varphi_1 \gamma_y(h-1) + \varphi_2 \gamma_y(h-2) + \cdots + \varphi_p \gamma_y(h-p)$$

The system of linear equations given in the previous slide is known as the system of Yule-Walker equations. This system can be solved for the autoregressive parameters, if the autocovariance function is known, or the autocovariance function if the parameters are known.

If we want to solve for the autocovariance function, we can rewrite the first and last equations as:

$$\gamma_y(0) - \varphi_1\gamma_y(1) - \varphi_2\gamma_y(2) - \cdots - \varphi_p\gamma_y(p) = \sigma_\epsilon^2$$

$$-\varphi_p\gamma_y(0) - \varphi_{p-1}\gamma_y(1) - \cdots - \varphi_1\gamma_y(p-1) + \gamma_y(p) = 0$$

and the $p-1$ intermediary equations as:

$$-\varphi_h\gamma(0) - \left(\varphi_{h-1} + \varphi_{h+1}\right)\gamma_y(1) - \cdots - \left(\varphi_1 + \varphi_{2h-1}\right)\gamma_y(h-1) + (1-\varphi_{2h})\gamma_y(h) - \varphi_{2h+1}\gamma_y(h+1) - \cdots - \varphi_p\gamma(p-h) = 0$$

for $h = 1, \ldots, p-1$. Using matrix notations, we need to solve:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varphi_1 & -\varphi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\varphi_p \\ -\varphi_1 & 1-\varphi_2 & -\varphi_3 & \cdots & \cdots & \cdots & & -\varphi_p \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ -\varphi_h & -\varphi_{h-1}-\varphi_{h+1} & \cdots & -\varphi_1-\varphi_{2h-1} & 1-\varphi_{2h} & -\varphi_{2h+1} & \cdots & -\varphi_p \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ -\varphi_p & -\varphi_{p-1} & -\varphi_{p-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_y(0) \\ \gamma_y(1) \\ \vdots \\ \gamma_y(h) \\ \vdots \\ \gamma_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

for $\gamma_y(h)$, $h = 0, \ldots, p$. The autocovariance is computed by inverting a $(p+1) \times (p+1)$ matrix

(3) Inversion du modèle MA

Nous avons montré que nous pouvions réécrire un processus AR comme un processus MA(∞) si les paramètres autoregressifs sont tels que les racines du polynôme retard sont strictement supérieures à 1 en module.

Il est possible, sous certaines conditions, de faire le chemin dans l'autre sens et d'écrire un processus MA sous la forme d'un processus AR(∞).

Par exemple, supposons que $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ soit un MA(1) :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \qquad [1]$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$.

- En $t-1$, nous avons :

$$Y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{t-1} = Y_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2} \qquad [2]$$

En substituant [2] dans [1], il vient :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta Y_{t-1} - \theta^2 \varepsilon_{t-2} \qquad [3]$$

- En $t-2$, nous avons :

$$Y_{t-2} = \varepsilon_{t-2} - \theta \varepsilon_{t-3}$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{t-2} = Y_{t-2} - \theta \varepsilon_{t-3} \qquad [4]$$

En substituant [4] dans [3], il vient

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} + \theta^3 \varepsilon_{t-3}$$

Si $|\theta| < 1$ on peut continuer ainsi indéfiniment :

$$Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \theta^i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

un processus $AR(\infty)$. Implicitement, nous avons ici simplement inversé le polynôme retard $\Theta(L) = 1 + \theta L$. Pour que cela soit possible, plus généralement pour un $MA(q)$, il faut que toutes les racines du polynôme $\Theta(z)$ soient plus grande que 1 en module. On dit alors que le processus MA est <u>inversible</u>

S'il est possible d'écrire un processus MA(q) sous la forme d'un AR(∞), on dit que le processus MA est inversible.

(4) Processus ARMA

(4.1) Motivation

Soit $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ et $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ deux processus AR(1):

$$Y_t = \varphi_Y Y_{t-1} + \varepsilon_{Y,t}$$

$$X_t = \varphi_X X_{t-1} + \varepsilon_{X,t}$$

avec $(\varepsilon_{Y,t}, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_Y^2)$, $(\varepsilon_{X,t}, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_X^2)$, $|\varphi_Y| < 1$ et $|\varphi_X| < 1$. On suppose que $\varepsilon_{Y,t} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{X,s}$ $\forall (t,s) \in \mathbb{Z}^2$.

On définit un processus $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ comme la somme de ces deux processus

$$Z_t = X_t + Y_t$$

$(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ est-il un processus AR ?

La réponse est non ...

Nous avons, en utilisant des polynômes retard $\Phi_X(L)$ et $\Phi_Y(L)$ pour les deux AR,

$$Z_t = \Phi_X(L)^{-1} \varepsilon_{X,t} + \Phi_Y(L)^{-1} \varepsilon_{Y,t}$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_t = (1-\varphi_X L)^{-1} \varepsilon_{X,t} + (1-\varphi_Y L)^{-1} \varepsilon_{Y,t}$$

En multipliant par $(1-\varphi_X L)(1-\varphi_Y L)$ il vient

$$(1-\varphi_X L)(1-\varphi_Y L) Z_t = (1-\varphi_Y L)\varepsilon_{X,t} + (1-\varphi_X L)\varepsilon_{Y,t}$$

$$\underbrace{\left(1-(\varphi_x+\varphi_y)L+\varphi_x\varphi_y L^2\right)Z_t}_{AR(2)} = \underbrace{\overbrace{\varepsilon_{x,t}+\varepsilon_{y,t}-\varphi_x\varepsilon_{x,t-1}}^{MA(1)}-\varphi_y\varepsilon_{y,t-1}}_{MA(1)\,?}$$

MA(1)

Vérifions que le membre de droite est bien un processus MA(1). Pour le vérifier, nous calculons la fonction d'autocovariance du membre de droite

$$S_t = \varepsilon_{x,t}+\varepsilon_{y,t}-\varphi_x\varepsilon_{x,t-1}-\varphi_y\varepsilon_{y,t-1}$$

- $\mathbb{E}[S_t]=0 \quad \forall t$

- $\mathbb{V}[S_t]=\mathbb{E}[S_t^2]$

les termes omis sont nuls en espérance si $\varepsilon_x \perp\!\!\!\perp \varepsilon_y$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[S_t]=\mathbb{E}\left[\varepsilon_{x,t}^2+\varepsilon_{y,t}^2+\varphi_x^2\varepsilon_{x,t-1}^2+\varphi_y^2\varepsilon_{y,t-1}^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[S_t]=(1+\varphi_x^2)\sigma_x^2+(1+\varphi_y^2)\sigma_y^2$$

$$\gamma(1) = \mathbb{E}[S_t S_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \mathbb{E}\Big[\left(\varepsilon_{x,t} + \varepsilon_{y,t} - \varphi_x \varepsilon_{x,t-1} - \varphi_y \varepsilon_{y,t-1}\right)\left(\varepsilon_{x,t-1} + \varepsilon_{y,t-1} - \varphi_x \varepsilon_{x,t-2} - \varphi_y \varepsilon_{y,t-2}\right)\Big]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \mathbb{E}\left[-\varphi_x \varepsilon_{x,t-1}^2 - \varphi_y \varepsilon_{y,t-1}^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(1) = -\varphi_x \sigma_x^2 - \varphi_y \sigma_y^2$$

et on vérifie facilement que

$$\gamma(h) = 0 \quad \forall \ |h| > 1$$

Il s'agit bien de la fonction d'autocovariance d'un MA(1). Si le membre de droite est

$$S_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

alors $\gamma(0) = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$

$$\gamma(1) = -\theta \sigma_\varepsilon^2$$

Il « suffit » donc de trouver θ et σ_ε^2 tels que

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 = (1+\varphi_x^2)\sigma_x^2 + (1+\varphi_y^2)\sigma_y^2 \\ \theta\sigma_\varepsilon^2 = \varphi_x\sigma_x^2 + \varphi_y\sigma_y^2 \end{cases}$$

Conclusion, la somme des deux AR peut s'écrire comme :

$$Z_t = \underbrace{(\varphi_x+\varphi_y)}_{\varphi_1} Z_{t-1} - \underbrace{\varphi_x\varphi_y}_{\varphi_2} Z_{t-2} + \varepsilon - \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

Il s'agit d'un processus ARMA(2,1) : deux retards sur la partie AR, un retard sur la partie MA.

De façon plus générale le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus ARMA(p,q) s'il est défini par :

$$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$ et $c, (\varphi_i)_{i=1}^p, (\theta_i)_{i=1}^q$ des paramètres réels.

On peut définir de façon plus synthétique le processus en utilisant des polynômes retard :

$$\Phi(L) Y_t = c + \Theta(L) \varepsilon_t$$

avec

$$\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$$

et

$$\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$$

On supposera que les racines des polynômes $\Theta(z)$ et $\Phi(z)$ sont distinctes, de façon à assurer que la représentation ARMA soit minimale. Par exemple, le modèle

$$y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1}$$

n'est pas minimale car il s'agit en fait d'un bruit blanc ! En effet, on a

$$y_t - a y_{t-1} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1-aL)}_{\phi(L)} y_t = \underbrace{(1-aL)}_{\Theta(L)} \varepsilon_t$$

Ici les deux polynômes retard sont identiques (mêmes racines). En supposant que $(1-aL)$ soit inversible, il vient

$$y_t = (1-aL)^{-1}(1-aL)\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad y_t = \varepsilon_t \quad \text{un bruit blanc.}$$

- Le processus ARMA(p,q) est asymptotiquement stationnaire au second ordre si et seulement si les racines de $\Phi(z)$ sont plus grandes que 1 en module

- Le processus ARMA(p,q) est inversible (ie on peut le réécrire sous la forme d'un AR(∞)) si et seulement si les racines de $\Theta(z)$ sont plus grandes que 1 en module.

- Calculons les moments sous l'hypothèse de stationnarité au second ordre.

<u>Espérance</u> On note $\mu = \mathbb{E}[Y_t]$. Par définition du processus, on a :

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \dots + \varphi_p \mathbb{E}[Y_{t-p}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] + \dots + \theta_q \mathbb{E}[\varepsilon_{t-q}]$$

sachant que le modèle est stationnaire (et donc que l'espérance est constante) et que l'innovation est d'espérance nulle :

$$\mu = c + \varphi_1 \mu + \dots + \varphi_p \mu$$

$$\iff \quad \boxed{\mu = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p}}$$

même espérance que dans le modèle AR(p), la partie MA n'a aucune conséquence sur l'espérance.

<u>Autocovariance</u> Pour calculer la fonct° d'autocovariance

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)]$$

il faut centrer le processus. On pose

$$Z_t = Y_t - \mu$$

le processus centré. On peut montrer

que ce processus est gouverné par le même modèle ARMA(p,q) mais sans constante. En effet :

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\Leftrightarrow Y_t = \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i\right) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{Y_t - \mu}_{Z_t} = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i (\underbrace{Y_{t-i} - \mu}_{Z_{t-i}}) + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\Leftrightarrow Z_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Z_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

ARMA(p,q) autocovariance function

The autocovariance function of a finite order ARMA stochastic process, as defined in ARMA, must solve the following Yule Walker equations:

$$\gamma_y(h) = \sum_{i=0}^{p} \varphi_i \gamma_y(h-i) + \sum_{j=0}^{q-h} \theta_{j+h} \alpha(j) \quad \forall h = 0, 1, \ldots, n$$

with

$$\alpha(j) = \sum_{i=1}^{\min(i,p)} \varphi_i \alpha(j-i) + \theta_j \sigma_\epsilon^2$$

and $\alpha(0) = \sigma_\epsilon^2$, $\theta_j = 0$ for all $j > q$, and $n = \max(p+1, q)$. The subsequent terms are recursively defined by:

$$\gamma_y(h) = \sum_{i=0}^{p} \varphi_i \gamma_y(h-i), \quad \forall h > n$$

For any h we have:

$$\gamma_Y(h) = \sum_{i=0}^{p} \varphi_i \gamma_Y(h-i) + \omega(h)$$

with

$$\omega(h) = \sum_{i=0}^{q} \theta_i \mathbb{E}\left[y_{t-h}\epsilon_{t-i}\right]$$

with $\theta_0 = 1$. Because $\mathbb{E}\left[y_t \epsilon_s\right] = 0$ for all $s > t$, we can simply the previous expression:

$$\omega(h) = \sum_{i=h}^{q} \theta_i \mathbb{E}\left[y_{t-h}\epsilon_{t-i}\right]$$

The stochastic process is assumed to be stationary, so that $\mathbb{E}\left[y_t \epsilon_s\right] = \mathbb{E}\left[y_{t-l}\epsilon_{s-l}\right]$ for any $l \in \mathbb{Z}$. Using this property, we can rewrite $\omega(h)$ as:

$$\omega(h) = \sum_{i=h}^{q} \theta_i \mathbb{E}\left[y_t \epsilon_{t+h-i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \omega(h) = \sum_{i=0}^{q-h} \theta_{i+h} \mathbb{E}\left[y_t \epsilon_{t-i}\right]$$

Where

$$\mathbb{E}\left[y_t \epsilon_t\right] = \sigma_\epsilon^2$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[y_t \epsilon_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p} \varphi_i y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}\right)\epsilon_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\varphi_1 y_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1}\right)\epsilon_{t-1}\right] \\
&= \varphi_1 \mathbb{E}\left[y_t \epsilon_t\right] + \theta_1 \sigma_\epsilon^2 \\
&= \left(\varphi_1 + \theta_1\right)\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[y_t \epsilon_{t-2}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p} \varphi_i y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}\right) \epsilon_{t-2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \theta_2 \epsilon_{t-2}\right) \epsilon_{t-2}\right] \\
&= \varphi_1 \mathbb{E}\left[y_t \epsilon_{t-1}\right] + \left(\varphi_2 + \theta_2\right) \sigma_\epsilon^2 \\
&= \left(\varphi_1 \left(\varphi_1 + \theta_1\right) + \varphi_2 + \theta_2\right) \sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

More generally, define $\alpha(j) = \mathbb{E}\left[y_t \epsilon_{t-j}\right]$. The function $\alpha(j)$ can be obtained recursively:

$$\alpha(j) = \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \varphi_i \alpha(j-i) + \theta_j \sigma_\epsilon^2$$

with $\theta_j = 0$ for all $j > q$ and $\alpha(0) = \sigma_\epsilon^2$. Finally we can rewrite the Yule Walker equations as:

$$\gamma_y(h) = \sum_{i=0}^{p} \varphi_i \gamma_y(h-i) + \omega(h)$$

with

$$\omega(h) = \sum_{i=0}^{q-h} \theta_{i+h} \alpha(i)$$

and

$$\alpha(i) = \sum_{j=1}^{\min(j,p)} \varphi_j \alpha(i-j) + \theta_i \sigma_\epsilon^2$$

Exemple

102

MOMENTS D'ORDRE 1 & 2 D'UN PROCESSUS ARMA(1,1)

UNIVERSITÉ DU MAINE

Soit $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique défini par :

$$y_t - \varphi y_{t-1} = \xi + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \tag{1}$$

On suppose que $\varphi \neq \theta$, $\varphi < 1$, $\theta < 1$, $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2, $\xi \in \mathbb{R}$. On suppose que la condition initiale est telle que ce processus ARMA(1,1) est stationnaire au second ordre, c'est-à-dire telle que les moments s d'ordre 1 et 2 sont invariants[1]. Notons μ_y, σ_y^2 et $\gamma_y(h)$ respectivement l'espérance, la variance et la fonction d'auto-covariance de ce processus. Puisque ce processus est stationnaire, en appliquant l'opérateur espérance à l'équation (1) on a directement :

$$\mu_y - \varphi\mu_y = \xi$$

Ainsi nous avons :

$$\mu_y = \frac{\xi}{1-\varphi} \tag{2}$$

En exprimant ξ en fonction de l'espérance, on peut réécrire l'équation (1) de façon équivalente :

$$y_t = \mu_y(1-\varphi) + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

soit encore

$$y_t - \mu_y = \varphi(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \tag{3}$$

En multipliant (3) par $y_t - \mu_y$ il vient :

$$(y_t - \mu_y)^2 = \varphi(y_t - \mu_y)(y_{t-1} - \mu_y) + (y_t - \mu_y)\varepsilon_t - \theta(y_t - \mu_y)\varepsilon_{t-1}$$

[1] Il faut que y_0 soit une variable aléatoire dont l'espérance et la variance correspondent aux moments asymptotiques d'ordre un et deux du processus ARMA, plus bas notés μ_y et σ_y^2.

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(0) = \varphi\gamma_y(1) + \mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_t\right] - \theta\mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right]$$

Il nous reste à évaluer les deux espérances, qui ne sont pas nulles a priori car $(y_t - \mu_y)$ dépend de ε_t et ε_{t-1} (voir l'équation (3)). Dans le premier cas nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\varphi(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_t\right] \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

car ε_t est une innovation (orthogonalité par rapport au passé de y_t). Pour la deuxième espérance, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\varphi(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_{t-1}\right] \\ &= \varphi\mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right] - \theta\sigma^2 \\ &= \varphi\mathbb{E}\left[\left(\varphi(y_{t-2} - \mu_y) + \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}\right)\varepsilon_{t-1}\right] - \theta\sigma^2 \\ &= (\varphi - \theta)\sigma^2\end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\gamma_y(0) = \varphi\gamma_y(1) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta) \tag{4}$$

En multipliant (3) par $y_{t-1} - \mu_y$ il vient :

$$(y_t - \mu_y)(y_{t-1} - \mu_y) = \varphi(y_{t-1} - \mu_y)^2 + (y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_t - \theta(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_{t-1}$$

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(1) = \varphi\gamma_y(0) + \mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_t\right] - \theta\mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right]$$

La première espérance est nulle car $(y_{t-1} - \mu_y)$ est non corrélé avec ε_t. En exprimant $(y_{t-1} - \mu_y)$ en fonction de y_{t-2}, ε_{t-1} et ε_{t-2}, on montre facilement que la deuxième espérance est égale à σ^2. Nous avons donc :

$$\gamma_y(1) = \varphi\gamma_y(0) - \theta\sigma^2 \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) forment un système de deux équations avec deux inconnues : $\gamma_y(0)$ et $\gamma_y(1)$:

$$\begin{cases}\gamma_y(0) &= \varphi\gamma_y(1) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta) \\ \gamma_y(1) &= \varphi\gamma_y(0) - \theta\sigma^2\end{cases}$$

En substituant la deuxième équation dans la première, il vient :

$$\gamma_y(0) = \varphi\left(\varphi\gamma_y(0) + \sigma^2\right) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta)$$

soit de façon équivalente :

$$\left(1-\varphi^2\right)\gamma_y(0)=\sigma^2(1+\theta^2-2\varphi\theta)$$

ou encore :

$$\gamma_y(0)=\sigma^2\frac{\theta^2-2\varphi\theta+1}{1-\varphi^2}$$

En substituant dans la seconde équation du système, nous obtenons finalement :

$$\begin{cases}\gamma_y(0) & =\sigma^2\frac{\theta^2-2\varphi\theta+1}{1-\varphi^2}\equiv\sigma_y^2\\ \gamma_y(1) & =\varphi\gamma_y(0)-\theta\sigma^2\end{cases}\tag{6}$$

Calculons l'auto-covariance d'ordre h pour $|h|\geq 2$. En multipliant (3) par $(y_{t-h}-\mu_y)$, il vient :

$$(y_t-\mu_y)(y_{t-h}-\mu_y)=\varphi(y_{t-1}-\mu_y)(y_{t-h}-\mu_y)+(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_t-\theta(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_{t-1}$$

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(h)=\varphi\gamma_y(h-1)+\mathbb{E}\left[(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_t\right]-\theta\mathbb{E}\left[(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_{t-1}\right]$$

Les deux espérances sont nulles dès lors que $h>1$, la fonction d'auto-covariance est finalement donnée par :

$$\begin{cases}\gamma_y(0) & =\sigma^2\frac{\theta^2-2\varphi\theta+1}{1-\varphi^2}\\ \gamma_y(1) & =\varphi\gamma_y(0)-\theta\sigma^2\\ \gamma_y(h) & =\varphi\gamma_y(h-1)\quad\forall|h|>1\end{cases}\tag{7}$$

On vérifie que nous retrouvons bien la fonction d'auto-covariance d'une processus AR(1) lorsque θ est nul ou la fonction d'autocovariance du MA(1) lorsque φ est nul. De façon générale, dès lors que l'horizon h est supérieur à l'ordre de la partie MA (1 dans le cas qui nous intéresse), le retour à zéro de la fonction d'auto-covariance est gouverné par la partie AR (dynamique géométrique).

À faire

ARMA(1,2), ARMA(2,1), ARMA(2,2) ...