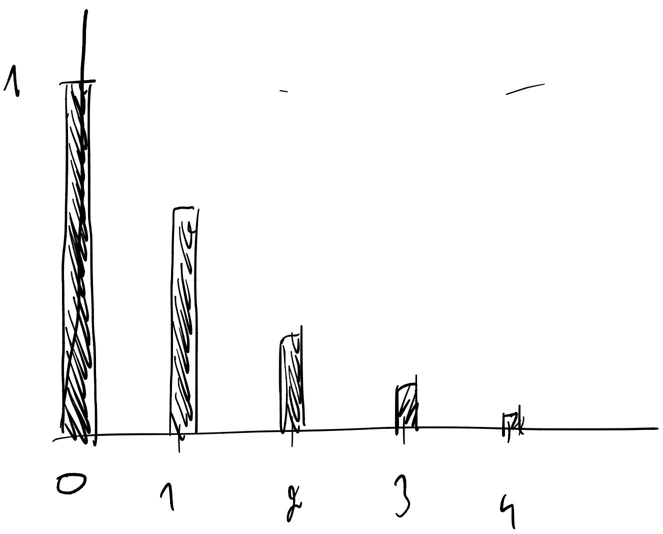
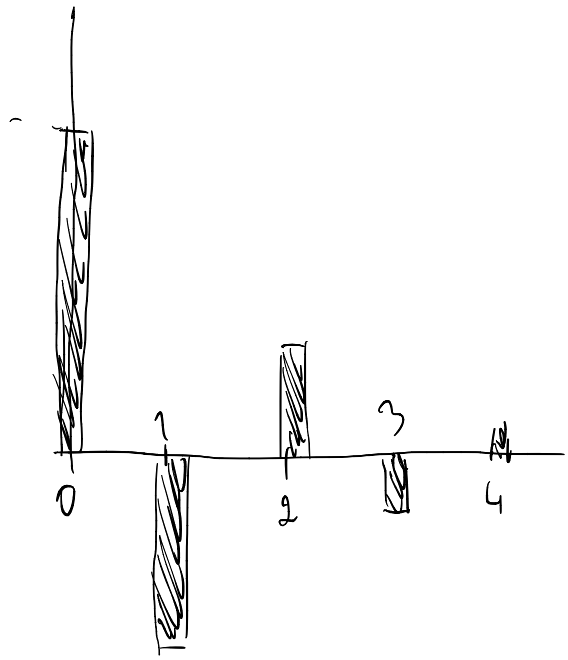
On représente la fonction d'autocorrélation graphiquement à l'aide d'un autocorrélogramme



$0 < \varphi < 1$

Convergence monotone vers 0



$-1 < \varphi < 0$

Convergence oscillatoire vers 0

	$h=0$	$h=1$	$h=2$	$h=3$	$h=4$	$h=5$
$\varphi=0,5$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
$\varphi=0,9$	1	0,9	0,81	0,729	0,6561	0,5905
$\varphi=0,99$	1	0,98	9,98	0,97	0,96	0,95

Plus φ, le paramètre autorégressif se rapproche de 1, moins vite la fonction d'autocorrélation tend vers 0.

INTUITION Plus φ se rapproche de 1, plus Y_t devient dépendant de son passé

QUESTION Que se passe-t-il dans le cas limite $\varphi=1$?

Pour répondre à cette question nous allons recalculer les moments sans recourir à l'hypothèse de stationnarité.

Supposons qu'il existe une condition initiale Y_0 : il s'agit d'une variable aléatoire d'espérance μ_0 et de variance σ_0^2.

Il est possible d'exprimer Y_t en fonction de Y_0 et des innovat° entre 0 et t. En effet :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \quad Y_t = \varphi(\varphi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t = \varphi^2 Y_{t-2} + \varphi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \quad Y_t = \varphi^2(\varphi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varphi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t = \varphi^3 Y_{t-3} + \varphi^2 \varepsilon_{t-2} + \varphi \varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$\vdots$

En itérant vers le passé jusqu'à Y_0, nous obtenons :

$$\boxed{Y_t = \varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}}$$

On peut vérifier que cette expression est correcte en la substituant dans l'expression récursive du processus AR(1). Il s'agit en fait de la solution de l'équation récurrente stochastique... On peut utiliser cette expression pour calculer les moments de l'AR(1).

Espérance

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \varphi^t \mathbb{E}[Y_0] + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{E}[Y_t] = \varphi^t \cdot \mu_0 \quad \forall\, t}$$

On constate que l'espérance n'est pas constante, sauf si l'espérance de la condition initiale est nulle.

<u>Variance</u>

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}\left[\varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \varphi^{2t} \mathbb{V}[Y_0] + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^{2i} \mathbb{V}[\varepsilon_{t-i}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \varphi^{2t} \sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^{2i}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{V}[Y_t] = \varphi^{2t} \sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\varphi^{2t}}{1-\varphi^2}}$$

À nouveau, on constate que la variance dépend du temps... Sauf si la variance de la condition initiale est égale à

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

Si $|\varphi| < 1$, alors le processus stochastique $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et Y_0 une variable aléatoire d'espérance μ_0 et de variance σ_0^2, est stationnaire au second ordre si et seulement si $\mu_0 = 0$ et $\sigma_0^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$.

Pour que le processus soit stationnaire au second ordre, il faut et il suffit que les moments de la condition initiale soient identiques aux moments que nous avions calculé en pages 24 à 26.

POURQUOI ?

↳ Il faut bien comprendre la nature de l'équation :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Une récurrence stochastique décrit en fait l'évolution dans le temps d'une distribution. Pour mieux comprendre ce point supposons que $\{\varepsilon_t\}$ soit un bruit blanc gaussien (normalement distribué) d'espérance nulle et de variance σ_ε^2, supposons aussi que la condition initiale soit normalement distribuée. On a donc

$$\begin{cases} \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2) \quad \forall t \\ Y_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \end{cases}$$

Puisque le modèle est linéaire, on sait que Y_t sera normalement distribué pour tout (une combinaison linéaire de variables aléatoires normales est normalement distribuée)

Loi de la variable aléatoire Y_1

Nous avons par définition

$$Y_1 = \varphi Y_0 + \varepsilon_1$$

et donc

$$Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[\varphi Y_0 + \varepsilon_1], \mathbb{V}[\varphi Y_0 + \varepsilon_1]\right)$$

$$\Leftrightarrow Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\varphi \mathbb{E}[Y_0] + 0, \varphi^2 \mathbb{V}[Y_0] + \sigma_\varepsilon^2\right)$$

$$\Leftrightarrow Y_1 \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{\varphi \mu_0}_{\mu_1}, \underbrace{\varphi^2 \sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2}_{\sigma_1^2}\Big)$$

La variable aléatoire Y_1 est normalem^t distribuée d'espérance μ_1 et de variance σ_1^2.

Loi de la variable aléatoire Y_2

$$Y_2 = \varphi Y_1 + \varepsilon_1 \sim \mathcal{N}\left(\varphi \mu_1 , \varphi^2 \sigma_1^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)$$

soit en substituant les définitions de μ_1 et σ_1^2 :

$$Y_2 \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{\varphi^2 \mu_0}_{\mu_2} , \underbrace{\varphi^4 \sigma_0^2 + (1+\varphi^2)\sigma_\varepsilon^2}_{\sigma_2^2}\Big)$$

La variable Y_2 est normalement distribuée d'espérance μ_2 et de variance σ_2^2.

Loi de la variable aléatoire Y_3

$$Y_3 \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{\varphi^3 \mu_0}_{\mu_3} , \underbrace{\varphi^6 \sigma_0^2 + (1+\varphi^2+\varphi^4)\sigma_\varepsilon^2}_{\sigma_3^2}\Big)$$

⋮

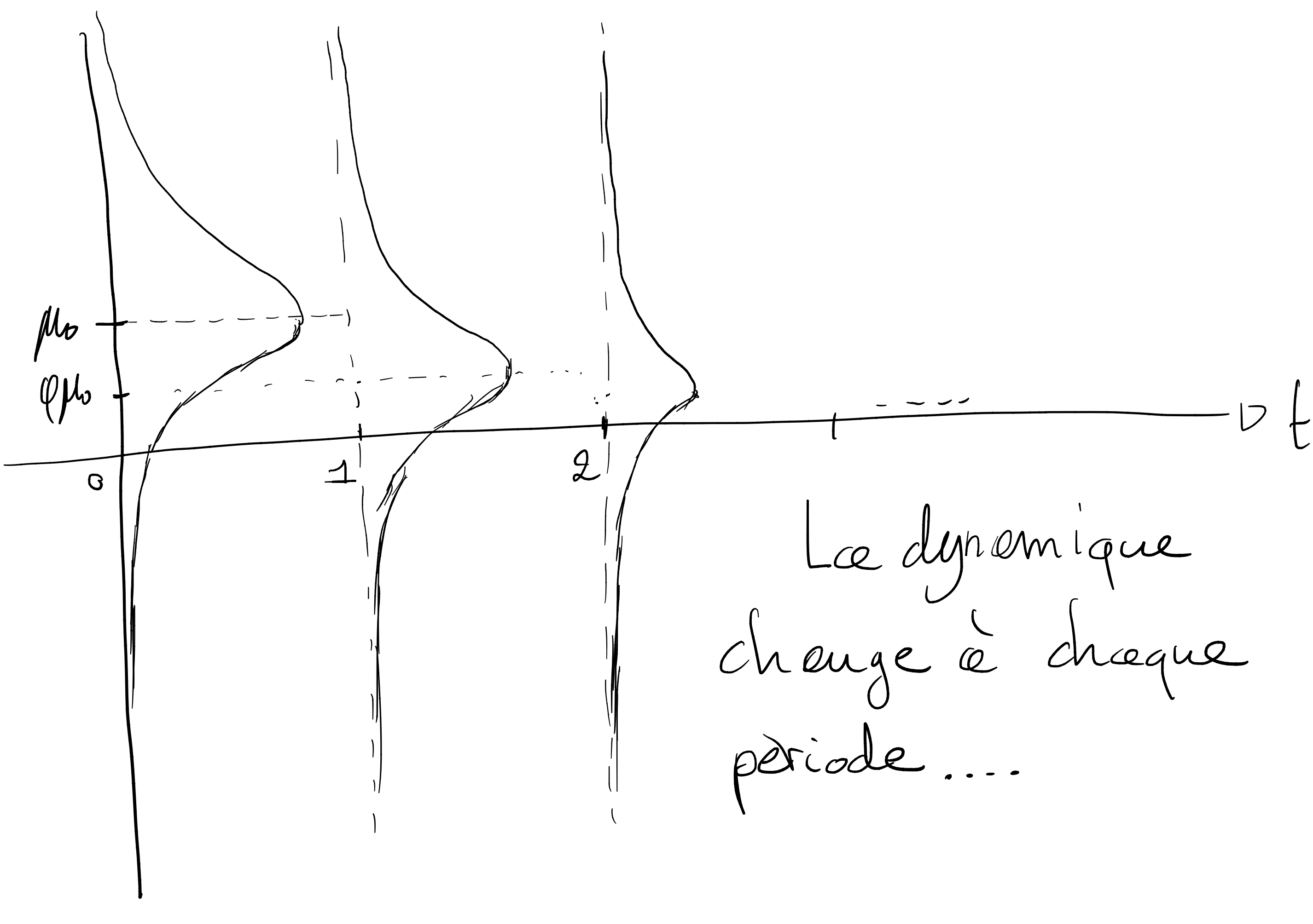
Loi de la variable aléatoire Y_t

$$Y_t \sim \mathcal{N}\left(\varphi \mu_{t-1}, \varphi^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2\right)$$

$$\Leftrightarrow Y_t \sim \mathcal{N}\left(\varphi^t \mu_0, \varphi^{2t}\sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^{2i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y_t \sim \mathcal{N}\left(\varphi^t \mu_0, \varphi^{2t}\sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\varphi^{2t}}{1-\varphi^2}\right)}$$

$\forall t \geq 0$



La dynamique change à chaque période....

... Puisque $|\varphi| < 1$, on peut itérer indéfiniment. Asymptotiquement, Y est normalement distribué :

$$Y_\infty \sim \mathcal{N}\left(\mu_\infty , \sigma_\infty^2\right)$$

avec
$$\mu_\infty = \lim_{t \to \infty} \mu_t = 0$$

$$\sigma_\infty^2 = \lim_{t \to \infty} \sigma_t^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

Y tend vers une distribution bien définie, les moments asymptotiques μ_∞ et σ_∞^2 ne dépendent pas de la distribution de la condition initiale et correspondent précisément aux moments que nous avons calculés en pages 24 à 26.

La récurrence stochastique

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

décrit la dynamique d'une distribution.
Pour toute condition initiale Y_0 la dynamique converge vers une distribution normale d'espérance nulle et de variance $\sigma^2/1-\varphi^2$.

↳ La loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}\right)$ est l'état stationnaire de la récurrence stochastique.

stationnarité du processus stochastique

C'est un point fixe dans l'espace des distributions. Si la condition initiale est gaussienne d'espérance μ_∞ et de variance σ_∞^2, alors la distribution est invariante.

<u>Définition</u> Un processus stochastique est asymptotiquement stationnaire au second ordre s'il existe une condition initiale telle que les moments d'ordre 1 et 2 soient invariants

▶ Utiliser la distribution asymptotique pour définir la condition initiale.

Pour que le modèle AR(1) soit asymptotiquement stationnaire au second ordre il faut et il suffit que $|\varphi| < 1$. En effet la dynamique de la distribution est caractérisée par le système dynamique (déterministe) suivant :

$$\begin{cases} \mu_t = \varphi \mu_{t-1} \\ \sigma_t^2 = \varphi^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

ce système est globalement stable si et seulement si $|\varphi| < 1$.

On dit que $|\varphi| < 1$ st une condition de stabilité de l'AR(1).

Remarque 4 Nous avons obtenu la distribution stationnaire en itérant vers le futur jusqu'à l'infini. Nous aurions pu le faire dans l'autre sens en itérant vers un passé infini. Nous avons montré que :

$$Y_t = \varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

Si nous ne disposons pas de la condition initiale Y_0, nous pouvons exprimer Y_0 en fonction de Y_{-1} et ε_0, puis Y_{-1} en fonction de Y_{-2} et ε_{-1}, ...

De façon plus générale nous avons :

$$Y_t = \varphi^s \underbrace{Y_{t-s}}_{u} + \sum_{i=0}^{s-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

$u = t-s$
$\Leftrightarrow s = t-u$

Ainsi, si nous exprimons Y_t en fonct° d'une condition initiale Y_u :

$$Y_t = \varphi^{t-u} Y_u + \sum_{i=0}^{t-u-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

Si on remonte le temps indéfiniment (c'est-à-dire $t \to -\infty$) alors la condition initiale (pourvu que ses moments soient finis) importe peu con

φ^{t-u} tend vers zéro puisque $|\varphi|<1$.
Asymptotiquement (vers le passé) on a donc :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

Nous venons de réécrire le processus AR(1) sous la forme d'un MA(∞). On obtient alors directement les moments de la distribution stationnaire :

$$\mathbb{E}[Y_t] = 0$$

$$\mathbb{V}[Y_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} \mathbb{V}[\varepsilon_{t-i}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2} \quad \forall t$$

Nous aurions pu écrire le modèle AR(1) en utilisant un polynôme retard :

$$\underbrace{(1 - \varphi L)}_{\Phi(L)} Y_t = \varepsilon_t$$

La condition de stabilité, ou de stationnarité asymptotique, du modèle AR(1) peut s'exprimer de façon équivalente comme une restriction sur la racine du polynôme retard. En effet

racine du polynôme $\phi(z)$

$$\phi(z^*) = 0$$

$$\iff 1 - \varphi z^* = 0$$

$$\iff z^* = \frac{1}{\varphi}$$

$|\varphi| < 1$

$\iff \left|\frac{1}{\varphi}\right| > 1$

Ainsi le processus est stable ssi la racine du polynôme retard est supérieure à 1 en valeur absolue.

Sous cette condition, voir le chapitre précédent, on obtient directement la représentation MA(∞) du processus en inversant le polynôme retard

$$Y_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t = (1-\varphi L)^{-1} \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

Exercice Soit le modèle AR(1) avec constante

$$Y_t = c + \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $|\varphi| < 1$ et $\varepsilon_t \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$. Caractériser la distribution stationnaire du processus stochastique. $\square$

Propriétés du modèle AR(1) si $\varphi = 1$

Si $\varphi = 1$ (ou -1) nous savons que nous ne pouvons pas inverser le polynôme retard. En pratique cela veut dire qu'il n'est pas possible de représenter le processus stochastique sous la forme d'un MA(∞) et que le processus n'admet pas de distribution stationnaire.

Supposons que la condition initiale soit une variable aléatoire d'espérance μ_0 et de variance σ_0^2.
On montre facilement que

$$Y_t = Y_0 + \sum_{\tau=1}^{t} \varepsilon_\tau$$

par récurrence arrière. Calculons les moments d'ordre 1 et 2 :

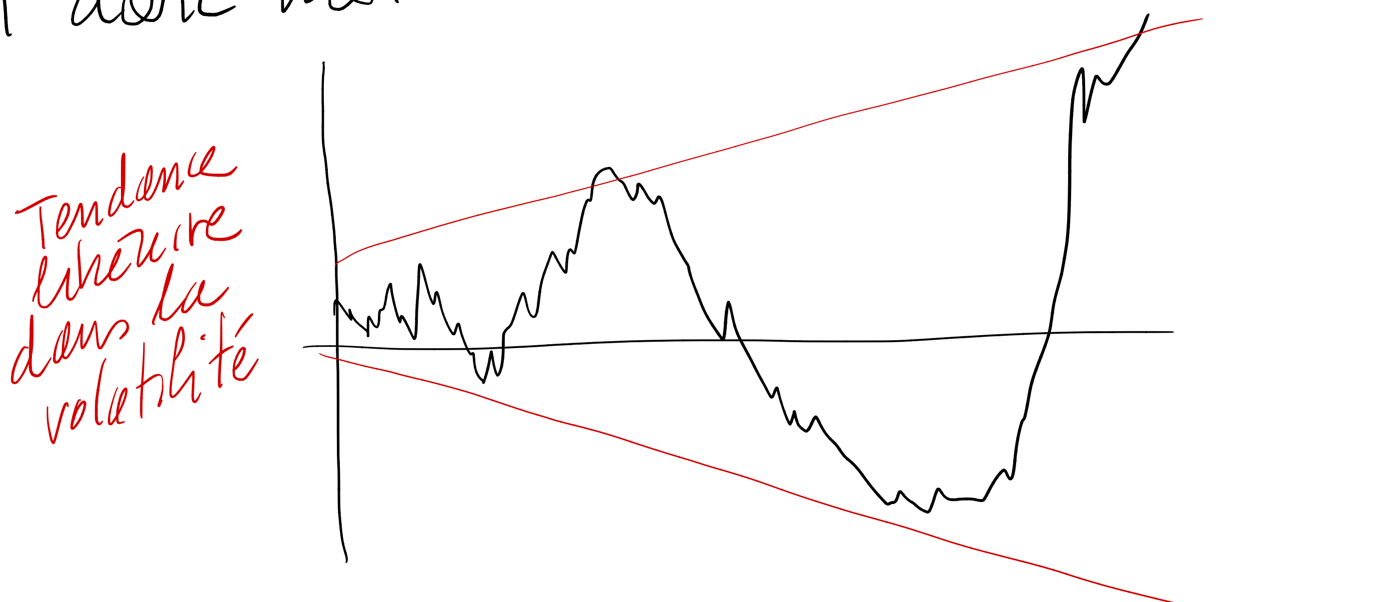
$$\mathbb{E}[Y_t] = \mu_0 \quad \forall\ t$$

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}\Big[Y_0 + \sum_{\tau=1}^{t} \varepsilon_\tau\Big]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[Y_0] + \sum_{\tau=1}^{t} \mathbb{V}[\varepsilon_\tau]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{V}[Y_t] = \sigma_0^2 + \sigma_\varepsilon^2 t}$$

L'espérance est constante mais la variance croît (car $\sigma_\varepsilon^2 > 0$) linéairement avec le temps. Le processus stochastique est donc non stationnaire.



Contrairement à ce que nous avions dans le cas $|\varphi|<1$, la variance ici ne cesse jamais de croître. On parle alors de tendance stochastique. Il n'est donc pas possible ici de définir une distribution stationnaire, puisque la variance augmente indéfiniment.

Nous n'aurons pas le temps d'étudier ce type de processus dans ce cours, mais il s'agit d'un cas extrêmement important dans la mesure où les propriétés statistiques de ce type de processus sont très particulières. Un processus de la forme

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

est appelé une <u>marche aléatoire</u>.
Notons que si dans ce cas la variance de Y_t n'est pas définie, celle de ΔY_t est elle bien définie (ici $\Delta Y_t = \varepsilon_t$ un bruit blanc, a fortiori stationnaire au second ordre).
Un processus non stationnaire qui peut être rendu stationnaire en le différenciant, c'est-à-dire en appliquant l'opérateur différence première Δ, est dit intégré d'ordre 1 (on note $I(1)$).

Propriétés du modèle AR(1) si $\varphi > 1$

La dynamique est explosive, mais surtout la représentation n'est pas causale. L'inversion du polynôme retard, qui est possible avec $\varphi > 1$, nous dit que Y_t n'est plus fonction des ε passés MAIS des ε futurs (voir la fin du chapitre précédent).

Remarque 5 Un modèle MA est toujours causal.

(2.2) Le processus AR(2)

On peut considérer un modèle avec deux retards sur l'endogène, on abordera plus loin le cas avec un nombre arbitraire de retards.

On peut créer un processus AR(2) en composant deux processus AR(1). Soit le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par

$$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $|\rho_1| < 1$ et $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On construit le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ comme :

$$Y_t = \rho_2 Y_{t-1} + X_t$$

avec $|\rho_2| < 1$. En utilisant des polynômes retard, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{cases} (1-\rho_1 L)X_t = \varepsilon_t & (*) \\ (1-\rho_2 L)Y_t = X_t & (**) \end{cases}$$

En substituant $(*)$ dans $(**)$, il vient :

$$(1-\rho_2 L)Y_t = (1-\rho_1 L)^{-1}\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1-\rho_1 L)(1-\rho_2 L)Y_t = \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1-(\rho_1+\rho_2)L + \rho_1\rho_2 L^2)Y_t = \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1-\varphi_1 L - \varphi_2 L^2)Y_t = \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $\varphi_1 = \rho_1 + \rho_2$ et $\varphi_2 = -\rho_1\rho_2$.

Par construction les racines du polynôme retard $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z$ sont supérieures à un en valeur absolue. La composition de deux AR(1) donne un AR(2).

Plus généralement, $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus AR(2) si

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$

Ce processus est stable, c'est-à-dire asymptotiquement stationnaire au second ordre (et causal) si les racines du polynôme retard sont plus grandes que 1 en <u>module</u>.

⚠ Les racines du polynôme retard peuvent être complexes conjugués... Même si le processus stochastique est à valeur dans $\mathbb{R}$ → composante cyclique (Cf. cours système dynamique, idem avec equations differentielles ou récurrentes).

POLYNOME CARACTERISTIQUE

Jusqu'ici nous avons discuté la stabilité des modèles AR en fonction des racines du polynôme retard. Il est possible de travailler avec le polynôme caractéristique (habituellement utilisé dans les cours sur les systèmes dynamique). Pour le modèle AR(2) le polynôme caractéristique est défini par :

$$\chi(z) = z^2 - \varphi_1 z - \varphi_2$$

Si zéro n'est pas une racine (ce qui arriverait si φ_2 était nul, mais alors il ne s'agirait pas d'un AR(2)) alors il existe une relation inverse entre les racines du polynôme retard et les racines du polynôme caractéristique.

En effet, nous avons :

$$\chi(z) = z^2 \underbrace{\left(1 - \varphi_1 \frac{1}{z} - \varphi_2 \frac{1}{z^2}\right)}_{\Phi(1/z)}$$

$$\iff \quad \chi(z) = z^2 \, \Phi(1/z)$$

Ainsi z^* est une racine de $\chi(z)$ si et seulement si $1/z^*$ est une racine du polynôme retard.

La condition de stabilité (stationnarité asymptotique au second ordre) est donc

→ les racines du polynôme retard sont plus grande que 1 en module

ou de façon equivalente

→ les racines du polynôme caracteristique sont plus petite que 1 en module (on dit aussi à l'interieur du cercle unité).

Exercice Soit le modèle AR(2)

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$. Quelles sont les conditions sur les paramètres autoregressifs φ_1 et φ_2 pour que le modèle soit stable ?

Il faut et il suffit que les racines du polynôme caractéristique :

$$\chi(z) = z^2 - \varphi_1 z - \varphi_2$$

soient inférieures à un en module. Commençons par calculer les racines. On a :

$$\Delta = \varphi_1^2 + 4\varphi_2$$

Les racines sont donc complexes conjugués dès lors que :

$$\varphi_2 < -\frac{1}{4}\varphi_1^2$$

Dans ce cas les racines sont :

$$z^* = \frac{\varphi_1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Le module de z^* est

$$\|z^*\|^2 = \left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 - \frac{\varphi_1^2+4\varphi_2}{4}$$

$$\|z^*\|^2 = \frac{\varphi_1^2}{4} - \frac{\varphi_1^2}{4} - \varphi_2$$

$$\|x^*\|^2 = -\varphi_2 > 0$$

car φ_2 est nécessairement négatif dans le cas complexe

$\Rightarrow$ Pour que le modèle soit stable dans le cas complexe il faut donc que $\varphi_2 > -1$.

Plaçons nous maintenant dans le cas réel, nous supposons que $\varphi_2 > -\frac{1}{4}\varphi_1^2$ ($\Delta > 0$).
Les racines sont :

$$z_1^* = \frac{\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2}$$

$$z_2^* = \frac{\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2}$$

z_2^* est nécessairement plus grand que z_1^* car $\sqrt{\Delta} > 0$. Cette racine est supérieure à 1 (non stationnarité) ssi

$$\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2} > 1$$

$$\iff \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > 2 - \varphi_1$$

Cette inégalité est forcément satisfaite pour tout $\varphi_1 > 2$. Dès lors que $\varphi_1 > 2$, le modèle est non stationnaire. Si $\varphi_1 < 2$

alors $2-\varphi_1 > 0$ et en prenant le carré :

$$\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4 + \varphi_1^2 - 4\varphi_1$$

$$\iff \quad \varphi_2 > 1 - \varphi_1$$

▶ Si $\varphi_2 < 1 - \varphi_1$ (dans le cas réel) alors la plus grande racine est inférieure à 1

La plus petite racine z_1^* est inférieure à -1 (non stationnarité) ssi

$$\frac{\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2} < -1$$

$$\iff \quad -\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < -2 - \varphi_1$$

$$\iff \quad \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > 2 + \varphi_1$$

Cette inégalité est satisfaite pour tout φ_2 inférieur à -2. Dès lors que $\varphi_1 < -2$ le modèle est non stationnaire. Si $\varphi_1 > -2$ alors en prenant le carré :

$$\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4 + \varphi_1^2 + 4\varphi_1$$

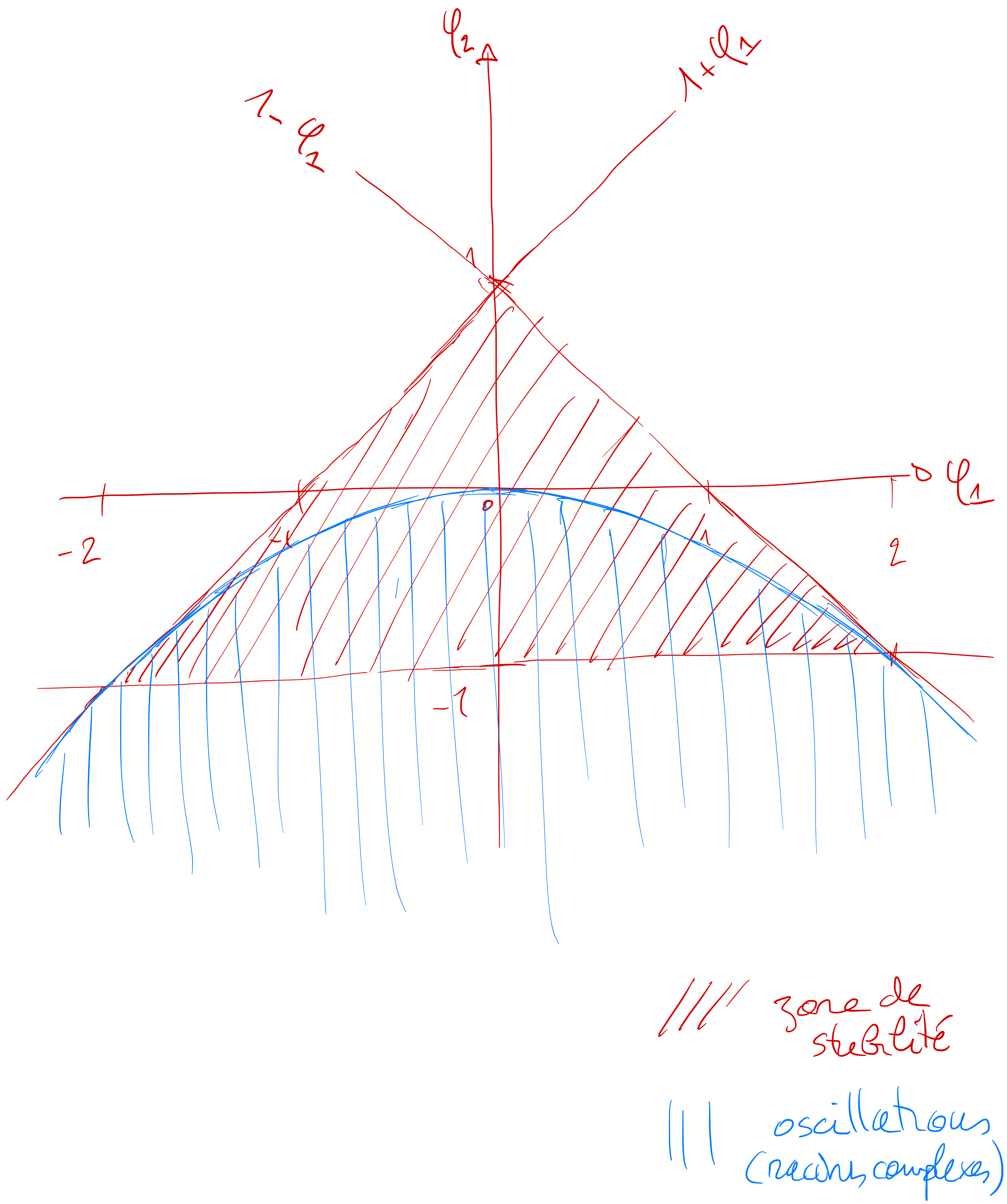
$$\Longleftrightarrow \quad \varphi_2 > 1 + \varphi_1$$

Ainsi, si $\varphi_2 < 1 + \varphi_1$ la plus petite racine est supérieure à -1.

Au total, le modèle est asymptotiquement stationnaire au second ordre ssi les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} \varphi_2 > -1 \\ \varphi_2 < 1 + \varphi_1 \\ \varphi_2 < 1 - \varphi_1 \end{cases}$$

On peut représenter ce résultat graphiquement dans le plan (φ_1, φ_2) :



Calculons les moments d'ordre 1 et 2 du processus AR(2) :

$$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$ en supposant que φ_1 et φ_2 sont tels que les racines du polynôme retard sont plus grandes que 1 en module et que le processus est stationnaire au second ordre.

<u>Espérance</u> On a par définition

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2}]$$

puisque le processus est supposé stationnaire on doit donc avoir

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_t] + \varphi_2 \mathbb{E}[Y_t]$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

__Variance__ On ne peut pas suivre la même approche que pour le processus AR(1)... Essayons ; par définition on a :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t]$$

comme c est déterministe et ε_t une innovation, on a aussi

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2}] + \sigma_\varepsilon^2$$

<u>Mais</u> comme Y_{t-1} et Y_{t-2} sont très probablement corrélés on ne peut simplement casser la première variance sur le membre de droite... Sans connaître la covariance entre Y_{t-1} et Y_{t-2} $\Longrightarrow$ Il n'est pas possible de calculer $\gamma(0)$ indépendamment de $\gamma(1)$.

Fonction d'autocovariance

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[\underbrace{(Y_t - \mu)}_{\text{processus centré}}(Y_{t-h} - \mu)\right]$$

avec $\mu = \dfrac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$ l'espérance

Notons $Z_t = Y_t - \mu$ le processus centré.
On peut montrer que le processus $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ vérifie :

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

Il s'agit du même processus mais sans la constante. En effet

$$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t = \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{Y_t - \mu}_{Z_t} = \varphi_1 \underbrace{(Y_{t-1} - \mu)}_{Z_{t-1}} + \varphi_2 \underbrace{(Y_{t-2} - \mu)}_{Z_{t-2}} + \varepsilon_t$$

La fonction d'autocovariance de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est identique à celle du processus centré $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)\right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \mathbb{E}\left[Z_t Z_{t-h}\right]$$

$\underline{\gamma(0)}$ On a :

$$Z_t Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} Z_t + \varphi_2 Z_{t-2} Z_t + \varepsilon_t Z_t$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_t^2] = \varphi_1 \mathbb{E}[Z_{t-1} Z_t] + \varphi_2 \mathbb{E}[Z_{t-2} Z_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Z_t]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \mathbb{E}[\varepsilon_t(\varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \varphi_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t Z_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[\varepsilon_t Z_{t-2}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2}$$

$\underline{\gamma(1)}$ On a :

$$Z_t Z_{t-1} = \varphi_1 Z_{t-1}^2 + \varphi_2 Z_{t-2} Z_{t-1} + \varepsilon_t Z_{t-1}$$

$$\Rightarrow \gamma(1) = \varphi_1 \gamma(0) + \varphi_2 \gamma(1) + \mathbb{E}[\varepsilon_t Z_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow (1-\varphi_2)\gamma(1) = \varphi_1 \gamma(0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma(0)}$$

$\gamma(2)$ On a :

$$Z_t Z_{t-2} = \varphi_1 Z_{t-1} Z_{t-2} + \varphi_2 Z_{t-2}^2 + \varepsilon_t Z_{t-2}$$

$$\Rightarrow \gamma(2) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(0) + \overline{\mathbb{E}[\varepsilon_t Z_{t-2}]}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(2) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(0)}$$

Plus généralement, on montre de la même façon que

$$\gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \varphi_2 \gamma(h-2)$$

Nous devons donc résoudre un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2 & (i) \\ \gamma(1) = \dfrac{\varphi_1}{1-\varphi_2} \gamma(0) & (ii) \\ \gamma(2) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(0) & (iii) \end{cases}$$

(ii) $\to$ (iii):

$$\gamma(2) = \left(\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2\right)\gamma(0) \qquad \text{(iii)}'$$

(iii)' + (ii) $\to$ (i):

$$\gamma(0) = \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}\gamma(0) + \frac{\varphi_2\varphi_1^2}{1-\varphi_2}\gamma(0) + \varphi_2^2\gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\left[1 - \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} - \frac{\varphi_2\varphi_1^2}{1-\varphi_2} - \varphi_2^2\right] = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{1-\varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_2\varphi_1^2 - \varphi_2^2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2} = \sigma_\varepsilon^2$$

a^2-b^2
$(a-b)(a+b)$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{(1-\varphi_2)\left[1-\varphi_2^2\right] - (1+\varphi_2)\varphi_1^2}{1-\varphi_2} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2)(1+\varphi_2) - (1+\varphi_2)\varphi_1^2}{1-\varphi_2} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{(1+\varphi_2)\left[(1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right]}{1-\varphi_2} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{(1+\varphi_2)(1+\varphi_1-\varphi_2)(1-\varphi_1-\varphi_2)}{1-\varphi_2}=\sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(0)=\frac{1-\varphi_2}{(1+\varphi_2)(1+\varphi_1-\varphi_2)(1-\varphi_1-\varphi_2)}\sigma_\varepsilon^2}$$

On vérifie facilement que pour $\varphi_2=0$ cette formule donne bien le résultat que nous obtenions pour le modèle AR(1).

On a directement (avec la deuxième équation du système) :

$$\gamma(1)=\frac{\varphi_1}{(1+\varphi_2)(1+\varphi_1-\varphi_2)(1-\varphi_1-\varphi_2)}\sigma_\varepsilon^2$$

Ensuite la fonction d'autocovariance est définie recursivement par

$$\gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \varphi_2 \gamma(h-2) \quad \forall h \geq 2$$

Comme pour le modèle AR(1) la fonction d'autocovariance est non nulle est converge vers 0 (si φ_1 et φ_2 sont tels que le modèle est stable).

Représentation MA(∞)

Si le processus AR(2) est asymptotiquement stationnaire, alors il admet une représentation MA(∞) :

$$Y_t = \mu + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{\Theta(L)\varepsilon_t}$$

Pour identifier $\Theta(L)$ et μ il « suffit » d'inverser le polynome retard $\Phi(L)$. L'AR(2) s'écrit :

$$\Phi(L) Y_t = c + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_t = \Phi(L)^{-1} c + \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t$$

Appliquer un opérateur retard à une constante ne change rien (une constante en t ou t-1 a la même valeur). On peut donc remplacer $\Phi(L)^{-1}c$ par $\Phi(1)^{-1}c$. Par identification, on a donc :

$$\mu = \Phi(1)^{-1} c$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{c}{1-\varphi_1-\varphi_2}$$ l'espérance de Y.

Par identification, on doit aussi avoir

$\Theta(z)$ st l'inverse de $\Phi(z)$.

$$\Phi(z) \cdot \Theta(z) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-\varphi_1 z-\varphi_2 z) \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i z^i = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i z^i - \varphi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i z^{i+1} - \varphi_2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i z^{i+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i z^i - \varphi_1 \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{i-1} z^i - \varphi_2 \sum_{i=2}^{\infty} \theta_{i-2} z^i = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (\theta_i - \varphi_1 \theta_{i-1} - \varphi_2 \theta_{i-2}) z^i = 1 \quad \forall z$$

avec $\theta_{-1} = \theta_{-2} = 0$

Par identification, on doit donc avoir :

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 \\ \theta_1 - \varphi_1 \theta_0 = 0 \\ \theta_2 - \varphi_1 \theta_1 - \varphi_2 \theta_0 = 0 \\ \theta_3 - \varphi_1 \theta_2 - \varphi_2 \theta_1 = 0 \\ \vdots \\ \theta_h - \varphi_1 \theta_{h-1} - \varphi_2 \theta_{h-2} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$\theta_1 = \varphi_1$

$\theta_2 = \varphi_2 + \varphi_1^2$

$\theta_3 = 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^3$

$\vdots$

On peut résoudre ce système pour la suite $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ recursivement en partant du haut vers le bas (la deuxième équation donne θ_1, la troisième donne θ_2, ...)