Modèles ARMA

Dans ce chapitre nous allons considérer une large classe de modèles linéaires qui permettent de construire des modèles à partir d'un bruit blanc : $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$.

$$\underbrace{AR}_{②}\ \underbrace{MA}_{①}$$

③

Auto Regressive [autorégressif] → AR ②

Moving Average [moyenne mobile] → MA ①

(1) Le modèle moyenne mobile

À partir d'un bruit blanc $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ de variance σ_ε^2 et d'espérance nulle, on construit un processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ en considérant des combinaisons linéaires des ε à différentes dates

(1.1) Le processus MA(1)

Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ on définit $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

avec θ une constante réelle, sur laquelle nous poserons des contraintes plus loin.

Caractérisons le processus en calculant ses moments d'ordre 1 et 2.

Espérance du MA(1)

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1}]$$

linéarité de l'espérance

$$= \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \theta\,\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}]$$

$$= 0$$

Variance du MA(1)

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t^2]$$

Car $\mathbb{E}[Y_t] = 0$

$$= \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1})^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2 + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2 - 2\theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right]$$

linéarité de l'espérance

$$= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \theta^2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] - 2\theta \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}]$$

$$= (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 + 0$$

$\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{t-1}$ (bruit blanc)

Fonction d'autocovariance du MA(1)

Car $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-h}] = 0$

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}]$$

$$= \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h} - \theta \varepsilon_{t-h-1})\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h} - \theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-h-1} - \theta \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h} + \theta^2 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1}\right]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}]}_{\neq 0 \text{ ssi } h=0} - \theta \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h-1}]}_{\neq 0 \text{ ssi } h=-1} - \theta \overbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-h}]}^{\neq 0 \text{ ssi } h=1} + \theta^2 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1}]}_{\neq 0 \text{ ssi } h=0}$$

$$= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h=0 \\ -\theta \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } |h|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction d'autocovariance est

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

on a donc

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ -\frac{\theta}{1+\theta^2} & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la fonction d'autocovariance ou d'autocorrélation est nulle au delà du rang 1.

PROCESSUS MA(1) NON CENTRE

Rajouter une constante dans la définition de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ n'affecte que l'espérance, pas les moments d'ordre 2.

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

- $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}]$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \mu + \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \theta \varepsilon_{t-1}$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \mu \quad \forall\, t$

- $\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])^2]$

$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[(\mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - \mu)^2\right]$

$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})^2\right]$

$\Rightarrow \mathbb{V}[Y_t] = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$ comme dans le modèle sous contrainte

- Idem pour la fonction d'autocovariance

Remarque! Les moments d'ordre 1 et 2 du processus ne dépendent pas du temps. Le processus MA(1) est toujours stationnaire (ie pour toute valeur de θ)

<u>Remarque 2</u> Si $\theta = a$ alors

$$\rho(1) = -\frac{a}{1+a^2}$$

Mais si $\theta = \frac{1}{a}$ ou a :

$$\rho(1) = -\frac{1/a}{1+1/a^2}$$

$$\Leftrightarrow \rho(1) = -\frac{1/a}{\frac{a^2+1}{a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \rho(1) = -\frac{a}{1+a^2}$$

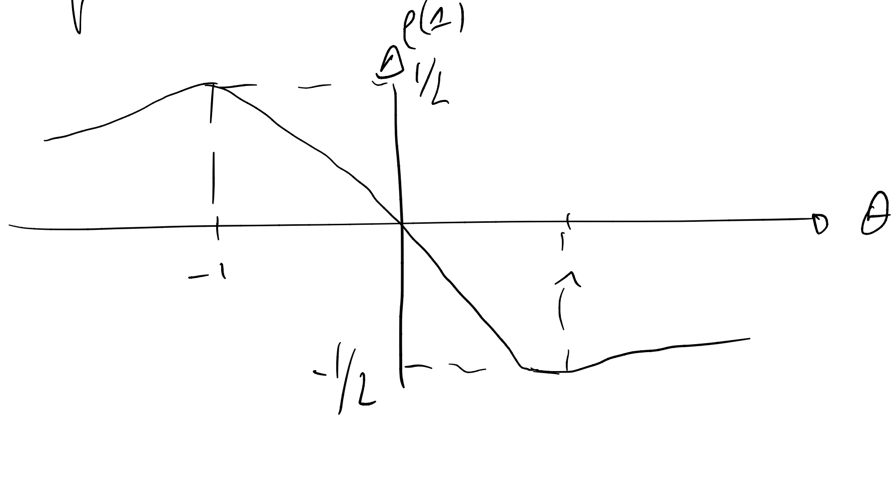
Autrement dit, pour $\theta = a$ ou $\theta = 1/a$ le processus a les mêmes propriétés en termes de dépendance.

$\Rightarrow$ Cela va poser un problème d'identification.

Pour résoudre le problème d'équivalence observationelle, on suppose que $|\theta| < 1$. On verra un autre argument plus bas.

<u>Remarque 3</u> La structure de dépendance du MA(1) est très limitée : Y_t est corrélé avec Y_{t-1} (ou Y_{t+1}) mais pas avec Y_{t-h} pour $|h|>1$.
La corrélation non nulle apparaît car deux Y consécutifs ont un ε en commun.
De plus on peut vérifier que la corrélation d'ordre 1 est nécessairement comprise entre $-1/2$ et $1/2$.

<u>Faire le graphique sous R</u>



On peut enrichir la structure d'autocorrélation en rajoutant des retards sur les innovations ε.

(1.2) Le processus MA(2)

Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ_ε^2. On définit le processus MA(2) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ de la façon suivante :

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

Remarque 1 On pourrait rajouter une constante et vérifier que cela n'affecte que l'espérance, comme dans le cas du modèle MA(1).

- On montre facilement que l'espérance est nulle :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] - \theta_2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = 0$$

- Calculons la variance :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2 - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - 2\theta_2 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + 2\theta_1 \theta_2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \theta_1^2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \theta_2^2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{V}[Y_t] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\, \sigma_\varepsilon^2}$$

- Calculons l'autocovariance d'ordre 1 :

$$\gamma(1) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \mathbb{E}\Big[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3})\Big]$$

→ produit non nul en espérance

— produit nul en espérance

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \mathbb{E}\left[-\theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1 \theta_2 \varepsilon_{t-2}^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(1) = \theta_1(\theta_2 - 1)\sigma_\varepsilon^2}$$

- Calculons l'autocovariance d'ordre 2 :

$$\gamma(2) = \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4})\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(2) = -\theta_2\,\mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-2}^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\gamma(2) = -\theta_2\,\sigma_\varepsilon^2}$$

- On vérifie que les autocovariances d'ordres supérieurs sont nulles car il n'y a plus d'innovations communes :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-h} - \theta_1\varepsilon_{t-h-1} - \theta_2\varepsilon_{t-h-2})\right]$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \gamma(h) = {} & \mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}] - \theta_1\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-1}] - \theta_2\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-2}] \\
& - \theta_1\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h}] + \theta_1^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1}] + \theta_1\theta_2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-2}] \\
& - \theta_2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-h}] + \theta_2\theta_1\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-h-1}] + \theta_2^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-h-2}]
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(h) = 0 \quad \forall\, |h| > 2}$$

$\Rightarrow$ La fonction d'autocovariance d'un MA(2) est nulle au delà du rang 2.

$\Rightarrow$ Le processus est stationnaire $\forall (\theta_1, \theta_2)$

On déduit la fonction d'auto-corrélation directement :

$$\rho(1) = \frac{\theta_1(\theta_2 - 1)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho(2) = -\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho(h) = 0 \quad \text{si } |h| > 2$$

(1.3) Le processus MA(q)

Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ_ε^2. On définit le processus MA(q) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ de la façon suivante :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Remarque 1 On pourrait rajouter une constante, ou autre fonct° déterministe, cela n'affecterait que l'espérance.

⚠ Nous n'avons pas adopté la même paramétrisat° que pour le MA(1) ou MA(2), en ne définissant pas le MA(q) comme

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Le choix de la paramétrisation (signe des coefficients) a évidemment des

des conséquences sur l'expression de la fonction d'autocovariance

- L'espérance de Y_t est nulle

$$\mathbb{E}[Y_t] = 0$$

- Calculons la variance :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t^2]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\left(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \theta_q^2 \varepsilon_{t-q}^2\right]$$

nous n'écrivons pas les termes croisés car ils sont nuls en espérance.

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{V}[Y_t] = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma_\varepsilon^2}$$

- Calculons la fonction d'autocovariance

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-h-i}\right)\right]$$

avec $\theta_0 = 1$.

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q} \theta_i \theta_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-h-j}\right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q} \theta_i \theta_j \, \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-h-j}]$$

Notons que $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-h-j}]$ est nulle sauf si $t-i = t-h-j$ c'est-à-dire si $i = h+j$ ou $j = i-h$, dans ce cas on a

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-h-j}] = \sigma_\varepsilon^2$$

On peut donc simplifier la double somme en éliminant les termes nuls (et posant $j = i-h$)

$$\boxed{\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q} \theta_i \theta_{i-h}}$$

avec, par convention :

$$\theta_{i-h} = 0 \quad \text{si } h > i$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(h) = 0 \quad \forall |h| > q$$

La fonction d'autocovariance d'un MA(q) est nulle au delà du rang q.

Pour obtenir une persitance « longue » au sens où Y_t et Y_{t-h} sont corrélés pour de grandes valeurs de h, il faut rajouter de nombreux retards dans le modèle MA, c'est-à-dire de nombreux paramètres. A l'extrême si on souhaite que Y_t soit corrélé avec tout son passé il faut avoir un nombre infini de retards sur l'innovation !

Ce n'est pas très parcimonieux...

(1.4) Le modèle MA(∞)

Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ_ε^2. On définit un processus MA(∞) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ de la façon suivante :

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

avec $\theta_0 = 1$ et $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite absolument sommable, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i| < \infty$$

l'espérance de ce processus est égale à μ et sa variance :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[(Y_t - \mu)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 \varepsilon_{t-i}^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 \, \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-i}^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{V}[Y_t] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2}$$

La variance est finie car si les θ sont absolument sommables alors la somme des carrés est aussi finie :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i|\right)^2 < \infty \quad \text{car} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i| < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \neq i} |\theta_i||\theta_j| < \infty$$

On doit donc nécessairement avoir $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 < \infty$

La fonction d'autocovariance est :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-h-i}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_i \theta_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-h-j} \right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_i \theta_j \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-h-j}\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \theta_{i-h}}$$

$\Rightarrow$ La fonction d'autocovariance, et donc la fonction d'autocorrélation, est non nulle pour tout h.

(2) Le modèle autorégressif

Nous avons vu que le modèle moyenne mobile, MA, est peu économe si on cherche à modéliser un processus stochastique avec une persistence longue. Dans cette section on s'intéresse à un modèle en ce sens beaucoup plus parcimonieux !

(2.1) Le modèle AR(1)

Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc, $BB(\sigma_\varepsilon^2)$ $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus autorégressif d'ordre 1 s'il est défini par la récurrence stochastique suivante :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

On suppose que ε est indépendant du passé de Y, c'est une innovation. On suppose aussi, nous allons voir plus loin pourquoi, que le paramètre autoregressif est plus petit que 1 en valeur absolue : $|\varphi| < 1$.

Calculons les moments d'ordre 1 et 2 de ce processus en supposant qu'il est stationnaire.

- Calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \varphi \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}_{=0}$$

Puisque le processus est stationnaire les moments sont invariants et donc

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}]$$

Ainsi nous devons avoir

$$\mathbb{E}[Y_t] = \varphi \mathbb{E}[Y_t]$$

pour tout φ (dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$). La seule solution possible pour l'espérance est

$$\boxed{\mathbb{E}[Y_t] = 0}$$

– Calcul de la variance :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t]$$

Comme ε_t est indépendant du passé de Y_t, nous pouvons « casser » la variance sur le membre de droite :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi Y_{t-1}] + \mathbb{V}[\varepsilon_t]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{V}[Y_t] = \varphi^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + \sigma_\varepsilon^2$$

Sous l'hypothèse de stationnarité nous avons $\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[Y_{t-1}]$. La variance est donc solution de

$$\mathbb{V}[Y_t] = \varphi^2 \mathbb{V}[Y_t] + \sigma_\varepsilon^2$$

Nous obtenons :

$$\boxed{V[Y_t] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}}$$

La volatilité de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$
est d'autant plus importante que :

- la variance de l'innovation ε est grande
- le paramètre autorégressif φ est proche de 1 ou -1

Remarque 1 La variance n'est pas définie pour $|\varphi| = 1$, elle devient même negative pour $|\varphi| > 1$.

- Calcul de la fonction d'autocovariance :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}]$$

car Y_t est d'espérance nulle.

On a :

$$Y_t Y_{t-h} = \varphi Y_{t-1} Y_{t-h} + \varepsilon_t Y_{t-h}$$

en prenant l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] = \varphi \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-h}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-h}]$$

Concentrons-nous sur le cas $|h| \geq 1$, puisque nous avons déjà calculé la variance. On sait que

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-h}] = 0$$

car ε_t est indépendant du passé de Y_t. Par définition de la fonction d'autocovariance, nous avons donc

$$\gamma(h) = \varphi \gamma(h-1)$$

La fonction d'autocovariance est donc complètement définie de façon récursive puisque $\gamma(0)$ est connu (il s'agit de la variance) :

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

$$\gamma(1) = \varphi \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

$$\gamma(2) = \varphi^2 \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

$$\vdots$$

$$\gamma(h) = \varphi^{|h|} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

$$\vdots$$

<u>Remarque 2</u> La fonction d'autocovariance est non nulle, à tout ordre, et décroissante (en valeur absolue).

La fonction d'autocorrélation est

$$\boxed{\rho(h) = \varphi^{|h|}}$$

<u>Remarque 3</u> Le paramètre autoregressif φ s'interprète donc comme un paramètre de persistance, plus il est proche de 1 (ou -1) moins vite la fonction d'autocorrélation va converger vers 0.

<u>Exercice</u> Calculer les moments d'ordre 1 et 2 du processus

$$Y_t = c + \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(\sigma_\varepsilon^2)$, $|\varphi| < 1$, sous l'hypothèse de stationnarité.