

SÉRIES TEMPORELLES

UNIVERSITÉ DU MANS (2^{NDE} SESSION, L3)

Mardi 16 juin 2026

EXERCICE 1 Soit le processus moyenne mobile MA(2) :

$$Y_t = \varepsilon_t - \frac{5}{6}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{6}\varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 .

(1) Ce processus est-il stationnaire au second ordre? Justifier sans calcul.

(2) Calculer l'espérance et les autocovariances $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2)$ ainsi que $\gamma(h)$ pour $h \geq 3$.

(3) En déduire la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$.

(4) Le processus est-il inversible? On déterminera les racines du polynôme retard moyenne mobile et on donnera sa factorisation.

EXERCICE 2 Soit le processus AR(2) :

$$Y_t = 1 + Y_{t-1} - \frac{1}{2}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 .

(1) Montrer que ce processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre. Que remarque-t-on sur les racines du polynôme retard?

On suppose dans toute la suite que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Calculer son espérance.

(3) Écrire les équations de Yule-Walker et en déduire $\gamma(0), \gamma(1)$ et $\gamma(2)$ en fonction de σ_ε^2 .

(4) Donner la relation de récurrence vérifiée par $\gamma(h)$ pour $h \geq 1$. En résolvant cette récurrence, donner la forme générale de $\gamma(h)$ et commenter le comportement de la fonction d'autocorrélation lorsque h varie.

EXERCICE 3 Soit le processus AR(1) gaussien :

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\varphi| < 1$$

avec $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, indépendants entre eux. On note $\mathcal{Y}_T \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ l'échantillon observé et $\theta = (c, \varphi, \sigma_\varepsilon^2)'$ le vecteur des paramètres. On supposera le processus stationnaire.

(1) À l'aide du théorème de Bayes, écrire la décomposition de la vraisemblance exacte. On précisera la loi marginale de la première observation y_1 .

(2) Définir la vraisemblance conditionnelle (on conditionnera par rapport à y_1) et donner l'expression de la log-vraisemblance conditionnelle.

(3) Montrer qu'à σ_ε^2 fixé, la maximisation de la log-vraisemblance conditionnelle par rapport à (c, φ) équivaut à un problème de moindres carrés ordinaires. En déduire l'estimateur sous forme matricielle, puis l'estimateur de σ_ε^2 .

(4) On souhaite tester l'absence de dynamique, c'est-à-dire $H_0 : \varphi = 0$ contre $H_1 : \varphi \neq 0$. Sachant que $\sqrt{T}(\hat{\varphi} - \varphi) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1 - \varphi^2)$, proposer une statistique de test et donner sa loi asymptotique sous H_0 . Quelle est la règle de décision au seuil de 5 %?

EXERCICE 4 Soit le processus MA(1) :

$$Y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 .

(1) Calculer la fonction d'autocovariance puis l'autocorrélation d'ordre 1 de $\{Y_t\}$.

(2) On considère le processus $\tilde{Y}_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$ où u_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_u^2 = 4\sigma_\varepsilon^2$. Montrer que $\{\tilde{Y}_t\}$ et $\{Y_t\}$ ont la même fonction d'autocovariance. Que peut-on en conclure sur l'identification d'un processus MA à partir de ses moments d'ordre 1 et 2 ?

(3) Rappeler la définition de l'inversibilité d'un processus MA. Parmi les deux représentations précédentes, laquelle est inversible ? Pour cette représentation, exprimer (à l'aide du polynôme retard) l'innovation en fonction du présent et du passé du processus observé.

(4) Pourquoi impose-t-on la condition d'inversibilité lors de l'estimation d'un modèle MA ?