

SÉRIES TEMPORELLES

UNIVERSITÉ DU MAINE (2ND SESSION, L3)

Mardi 17 juin 2025

EXERCICE 1 Donner l'expression des vraisemblances exacte et conditionnelle d'un processus MA(1) d'espérance nulle. On notera $\mathcal{Y}_T \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ l'échantillon et on supposera que les innovations sont normalement distribuées d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 . Serait-il possible d'estimer les paramètres de ce modèle par les MCO?

EXERCICE 2 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA(1, 1) de la forme :

$$y_t = 1 + \frac{1}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible? Justifier votre réponse.

On suppose maintenant que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ). **(4)** Calculer les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculer l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculer l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$. **(7)** Définir la fonction d'autocorrélation.

EXERCICE 3 Calculer les moments d'ordre 1 et 2 d'un processus ARMA(1,2) que nous supposerons stationnaire :

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 .

EXERCICE 4 Supposons que pour mesurer la composante cyclique d'une série temporelle nous considérons la variation de la variable, *i.e.* supposons que la composante cyclique d'une série temporelle $\{y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ soit :

$$y_t^c = \Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1}$$

(1) Montrer que la fonction d'autocovariance de la composante cyclique (notée $\gamma_c(h)$) vérifie :

$$\gamma_c(h) = 2\gamma(h) - \gamma(h-1) - \gamma(h+1)$$

où $\gamma(h)$ est la fonction d'autocovariance du processus $\{y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

On suppose que le processus stochastique $\{y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est un AR(1) :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ρ un réel entre -1 et 1 (exclus) et ε_t un bruit blanc de variance σ_ε^2 . **(2)** Calculer la fonction d'autocovariance $\gamma_c(h)$ de la composante cyclique. Montrer que $\gamma_c(h) \leq 0$ pour tout h si $\rho \in [0, 1]$ et que cette fonction d'autocovariance est de signe alterné sinon.