Séries temporelles

Exercice 1 Soient les fonctions d'auto-corrélation et de corrélation partielle suivantes :

h	0	1	2	3	4	5
$\rho(h)$	1	0,70	0,00	0,00	0,00	0,00
$r(h)$	–	0,70	0,49	0,34	0,24	0,17

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p+q \leq 2$. En justifiant votre réponse, déterminez la forme du processus qui a généré $\rho(h)$ et $r(h)$. Que pouvez-vous dire des paramètres du ce modèle ?

Exercice 2 Soit le processus stochastique défini par :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-2}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2. **(1)** Quel est le nom de ce processus ? **(2)** Est-il possible d'estimer les paramètres de ce modèle (θ et σ_ε^2) par les MCO ? **(3)** On note $\mathcal{Y}_T = \{y_1, \dots, y_T\}$ l'échantillon, donner l'expression de la vraisemblance exacte. **(4)** Donner l'expression de la vraisemblance conditionnelle.

Exercice 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = 1 + \frac{2}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifier votre réponse. **(2)** On suppose dans la suite que le processus est stationnaire au second ordre. Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ). **(4)** Calculer les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculer l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculer l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$. **(7)** Définir la fonction d'autocorrélation.

Exercice 4 Soit le processus AR(2) :

$$y_t = c + (\rho_1 + \rho_2)y_{t-1} - \rho_1\rho_2 + \varepsilon_t$$

avec $c \in \mathbb{R}$, $-1 < \rho_1 < 1$, $-1 < \rho_2 < 1$ et $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$. Écrire la représentation MA(∞) de ce processus (en expliquant pourquoi cela est possible, en particulier vous montrerez que les coefficients de la forme MA sont absolument sommables).