SÉRIES TEMPORELLES

Le 27 janvier 2026 à 15:30

EXERCICE 1 Soient les fonctions d'autocovariance et de d'autocorrélation partielle suivantes :

h	0	1	2	3	4	5
$\gamma(h)$	$4/3$	$2/3$	$1/3$	$1/6$	$1/12$	$1/24$
$r(h)$	–	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p+q \leq 2$. En justifiant votre réponse, déterminez la forme du processus qui a généré $\gamma(h)$ et $r(h)$. Que pouvez vous dire des paramètres de ce modèle ?

EXERCICE 2 Soît $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus MA(1) inversible de moyenne non nulle. On observe une réalisation de ce processus, un échantillon, que nous noterons $\mathcal{Y}_T = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$. **(1)** Est-il possible d'estimer ce modèle par les MCO ? Pourquoi ? **(2)** Écrire la vraisemblance conditionnelle. **(3)** Discuter les conséquences de l'hypothèse sur la condition initiale. Sous quelle hypothèse le choix de la condition initiale n'a pas d'importance asymptotiquement ?

EXERCICE 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = \frac{2}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifiez votre réponse.

On suppose que les conditions initiales sont telles que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculez l'espérance (on notera μ l'espérance). **(4)** Calculez les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculez l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculez l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$.

EXERCICE 4 Un modèle macroéconomique nous dit que la production est déterminée par une fonction de production Cobb-Douglas ; le logarithme de la production est une fonction linéaire du stock de capital en logarithme :

$$y_t = \alpha k_t + a_t$$

où a_t est le logarithme de la productivité, dont la dynamique est donnée par un modèle AR(1) :

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε_t une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance σ_ε^2. Le paramètre ρ est tel que la productivité (en logarithme) est stationnaire, le paramètre $\alpha \in]0,1[$ est l'élasticité de la production par rapport au stock de capital physique. La dynamique de ce dernier résulte des choix d'épargne des ménages. On admet qu'elle est donnée par :

$$k_t = \eta_{kk}k_{t-1} + \eta_{ka}a_{t-1}$$

(1) Montrer que y_t est un processus ARMA(2,1). ***Indice :*** *Réécrire le modèle à l'aide de polynômes retard.* **(2)** Calculer les racines de la partie autorégressive de ce processus ARMA(2,1) et déduire une condition sur η_{kk} assurant la stationarité de la production.