Séries temporelles

Université du Maine (Examen, L3)

Exercice 1 Soient les fonctions d'auto-corrélation et de corrélation partielle suivantes :

h	0	1	2	3	4	5
$\rho(h)$	–	0,70	0,00	0,00	0,00	0,00
$r(h)$	1	0,70	0,49	0,34	0,24	0,17

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec p égal à zéro ou un, q égal à zéro ou un et $p + q \leq 2$. En justifiant votre réponse, déterminer la forme du processus qui a généré $\rho(h)$ et $r(h)$. Que pouvez-vous dire des paramètres de ce modèle ?

Exercice 2 Écrire la vraisemblance exacte d'un processus MA(1) inversible. Écrire la vraisemblance conditionnelle du même processus. On notera $\mathcal{Y}_T = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$ l'échantillon.

Exercice 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1, 2)$ de la forme :

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2.

(1) Sous quelles conditions le processus est-il stationnaire ?

On suppose que ces conditions sont satisfaites et que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Donnez les conditions sur θ_1 et θ_2 pour que le processus soit inversible. Justifier la réponse. **(3)** Quelles sont les implications de l'hypothèse de stationnarité sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ l'espérance). **(4)** Calculer la fonction d'autocovariance que nous noterons $\gamma(h)$.

Exercice 4 Soit le modèle état mesure suivant :

$$y_t = z_t + \varepsilon_t$$
$$z_t = z_{t-1} + \eta_t$$

avec $\varepsilon_t \equiv BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\eta_t \equiv BB(0, \sigma_\eta^2)$. Le second processus, $\{z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ est une marche aléatoire, $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ et une marche aléatoire «bruitée» et on notera $\kappa = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2$ le ratio signal-bruit. **(1)** Montrer que la variance de $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas définie. Donner l'intuition. **(2)** Calculer la fonction d'autocovariance de $\{\Delta y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. **(3)** Conclure sur la nature du processus $\{\Delta y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. **(4)** Identifier les paramètres du modèle.