Séries temporelles

Université du Maine (Rattrapage, L3)

Exercice 1 Soit le processus stochastique défini par :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-2}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2. **(1)** Quel est le nom de ce processus ? **(2)** Est-il possible d'estimer les paramètres de ce modèle (θ et σ_ε^2) par les MCO ? **(3)** On note $\mathcal{Y}_T = \{y_1, \dots, y_T\}$ l'échantillon, donner l'expression de la vraisemblance exacte. **(4)** Donner l'expression de la vraisemblance conditionnelle.

Exercice 2 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = 1 + \frac{2}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifier votre réponse.

On suppose maintenant que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ). **(4)** Calculer les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculer l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculer l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$. **(7)** Définir la fonction d'autocorrélation.

Exercice 3 Soit le processus ARMA(2,1) :

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2 et c, φ_1, φ_2 et θ sont des paramètres réels. **(1)** Donner les conditions sur c, φ_1, φ_2 et θ qui assurent la stationnarité du processus stochastique. **(2)** Donner les conditions sur c, φ_1, φ_2 et θ sous lesquelles le processus stochastique est inversible. **(3)** Sous quelle condition ce processus ARMA(2,1) est bien une représentation minimale du processus stochastique ? **(4)** Sous l'hypothèse de stationnarité, calculer l'espérance du processus stochastique. **(5)** Sous la même hypothèse, calculer la fonction d'autocovariance.