Séries temporelles

Université du Mans (Examen, L3)

Exercice 1 Donner l'expression des vraisemblances exacte et conditionnelle d'un processus MA(1) d'espérance nulle. On notera $\mathcal{Y}_T \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ l'échantillon et on supposera que les innovations sont normalement distribuées d'espérance nulle et de variance σ_ϵ^2. Serait-il possible d'estimer les paramètres de ce modèle par les MCO ?

Exercice 2 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = 1 + \frac{1}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifier votre réponse.

On suppose maintenant que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ). **(4)** Calculer les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculer l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculer l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$. **(7)** Définir la fonction d'autocorrélation.

Exercice 3 Calculer les moments d'ordre 1 et 2 d'un processus ARMA(2,2) que nous supposerons stationnaire :

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2.

Exercice 4 Soit $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique stationnaire d'espérance nulle et dont la fonction d'autocovariance est notée $\gamma(h)$. On s'intéresse à la fonction d'autocovariance du processus $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, que nous noterons $\gamma_\Delta(h)$. **(1)** Quelle est l'espérance de Δy_t ? **(2)** Montrer que la fonction d'autocovariance de Δy_t vérifie :

$$\gamma_\Delta(h) = 2\gamma(h) - \gamma(h-1) - \gamma(h+1)$$

(3) On suppose que le processus stochastique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un AR(1) :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ρ un réel entre -1 et 1 (exclus) et ε_t un bruit blanc de variance σ_ε^2. Exprimer la fonction d'autocovariance $\gamma_\Delta(h)$ en fonction de ρ et σ_ε^2. **(4)** Montrer que $\gamma_\Delta(h) \leq 0$ pour tout h si ρ et positif et inférieur à 1, de signe alterné sinon.