Séries temporelles

Université du Mans (Examen, L3)

Exercice 1 Soient les fonctions d'autocorrélation et de d'autocorrélation partielle suivantes :

h	0	1	2	3	4	5
$\rho(h)$	1	.9	.81	.729	.6561	.59049
$r(h)$	–	.9	0,00	0,00	0,00	0,00

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p + q \leq 2$. **(1)** En justifiant votre réponse, déterminez la forme du processus qui a généré $\rho(h)$ et $r(h)$. **(2)** Que pouvez-vous dire des paramètres de ce modèle ? **(3)** En supposant que la variance de l'innovation du modèle est égale à 1/10, calculez la variance du processus stochastique.

Exercice 2 Soit $\{\varepsilon_t\}$ un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, déterminer quels sont les processus stochastiques pour lesquels y_t et y_{t-2} sont indépendants :

1. $y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t$
2. $y_t = 1 + \varepsilon_t - \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = 3 + \varepsilon_t + \frac{2}{10}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{10}\varepsilon_{t-2}$

Justifier vos réponse.

Exercice 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = 1 + \frac{2}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifiez votre réponse.

On suppose que les conditions initiales sont telles que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculez l'espérance (on notera μ l'espérance). **(4)** Calculez les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculez l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculez l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$.

Exercice 4 Soit le processus AR(2) :

$$Y_t = c + (\rho_1 + \rho_2)Y_{t-1} - \rho_1\rho_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ et $\rho_1 \neq \rho_2$. **(1)** Montrer que le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre. **(2)** Écrire la vraisemblance exacte du processus (en utilisant le théorème de Bayes et détaillant le plus possible l'expression de la vraisemblance). **(3)** Écrire la vraisemblance conditionnelle du processus, en prenant soin d'expliquer son intérêt par rapport à la vraisemblance exacte.

Exercice 5 Soit le processus stochastique défini par :

$$\begin{cases} y_t &= \varphi y_{t-1} + u_t \\ u_t &= \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \end{cases}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_\varepsilon 2$, avec φ et θ plus petits que 1 en valeur absolue. **(1)** Montrer qu'il est possible d'écrire ce processus stochastique sous la forme $y_t = \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i}$, en explicitant ψ_i. **(2)** Calculer la variance de y_t à partir de la représentation alternative obtenue à la question 1.