Séries temporelles

Université du Mans (Examen, L3)

Exercice 1 Soient les fonctions d'autocovariance et de d'autocorrélation partielle suivantes :

h	0	1	2	3	4	5
$\rho(h)$	$4/3$	$2/3$	$1/3$	$1/6$	$1/12$	$1/24$
$r(h)$	–	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p + q \leq 2$. En justifiant votre réponse, déterminez la forme du processus qui a généré $\rho(h)$ et $r(h)$. Que pouvez vous dire des paramètres de ce modèle ?

Exercice 2 Soît $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus AR(1) stationnaire de moyenne non nulle. On observe une réalisation de ce processus, un échantillon, que nous noterons $\mathcal{Y}_T = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$. **(1)** Écrire la vraisemblance exacte. **(2)** Écrire la vraisemblance conditionnelle. **(3)** Montrez l'équivalence entre l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle et l'estimateur des MCO.

Exercice 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1, 1)$ de la forme :

$$y_t = \frac{2}{3}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifiez votre réponse.

On suppose que les conditions initiales sont telles que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculez l'espérance (on notera μ l'espérance). **(4)** Calculez les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculez l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculez l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$.

Exercice 4 Soit le processus AR(2) :

$$Y_t = c + (\rho_1 + \rho_2)Y_{t-1} - \rho_1\rho_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ et $\rho_1 \neq \rho_2$. **(1)** Montrez que le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre. On supposera dans la suite que le processus est stationnaire au second ordre. **(2)** Calculez l'espérance inconditionnelle de Y_t. **(3)** Calculez la fonction les autocovariances d'ordre 0, 1 et 2. **(4)** Donnez une expression récursive de l'autocovariance d'ordre h (c'est-à-dire exprimez $\gamma(h)$ en fonction de $\gamma(h-1)$ et $\gamma(h-2)$). **(5)** Calculez le terme général de la récurrence d'ordre deux caractérisant la fonction d'autocovariance et concluez sur le comportement asymptotique de la fonction d'autocovariance (c'est-à-dire quand h tend vers l'infini).