Séries temporelles

Université du Maine (Partiel, L3)

Exercice 1 Soit $\{\varepsilon_t\}$ un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, déterminer quels sont les processus stochastiques pour lesquels y_t et y_{t-2} sont indépendants :

1. $y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t$
2. $y_t = 1 + \varepsilon_t - \frac{1}{10}\varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = 3 + \varepsilon_t + \frac{2}{10}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{10}\varepsilon_{t-2}$

Justifier vos réponse.

Exercice 2 Donner l'expression des vraisemblances exacte et conditionnelle d'un processus AR(1) d'espérance nulle. On notera $\mathcal{Y}_T \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ l'échantillon et on supposera que les innovations sont normalement distribuées d'espérance nulle et de variance σ_ϵ^2. Quel est le rapport avec l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires ?

Exercice 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(2,1)$ de la forme :

$$y_t = 1 + \frac{1}{3}y_{t-1} - \frac{1}{3}y_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1. **(1)** Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifier votre réponse.

On suppose maintenant que le processus est stationnaire au second ordre. **(2)** Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ). **(4)** Calculer les autocovariances d'ordre 0, 1 et 2 (on notera $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$). **(5)** Calculer l'autocovariance d'ordre 3 (on notera $\gamma(3)$). **(6)** Calculer l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$. **(7)** Définir la fonction d'autocorrélation.

Exercice 4 Calculer les moments d'ordre 1 et 2 d'un processus ARMA(1,2) que nous supposerons stationnaire et inversible :

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2.

Exercice 5 Un modèle macroéconomique nous dit que la production est déterminée par une fonction de production Cobb-Douglas ; le logarithme de la production est une fonction linéaire du stock de capital en logarithme :

$$y_t = \alpha k_t + a_t$$

où a_t est le logarithme de la productivité, dont la dynamique est donnée par un modèle AR(1) :

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε_t une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance σ_ε^2. Le paramètre ρ est tel que la productivité (en logarithme) est stationnaire, le paramètre $\alpha \in]0,1[$ est l'élasticité de la production par rapport au stock de capital physique. La dynamique de ce dernier résulte des choix d'épargne des ménages. On admet qu'elle est donnée par :

$$k_t = \eta_{kk}k_{t-1} + \eta_{ka}a_{t-1}$$

(1) Montrer que y_t est un processus ARMA(2,1). ***Indice :*** *Réécrire le modèle à l'aide de polynômes retard.* **(2)** Calculer les racines de la partie autorégressive de ce processus ARMA(2,1) et déduire une condition sur η_{kk} assurant la stationarité de la production.