Séries temporelles

Université du Maine (Partiel, L3)

Exercice 1 Soient les fonctions d'auto-corrélation et de corrélation partielle suivantes

h	0	1	2	3	4	5
$\rho(h)$	1	0,70	0,49	0,34	0,24	0,17
$r(h)$	–	0,70	0,00	0,00	0,00	0,00

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec p égal à zéro ou un, q égal à zéro ou un et $p + q \leq 2$. En justifiant votre réponse, déterminez la forme du processus qui a généré $\rho(h)$ et $r(h)$. Que pouvez-vous dire des paramètres du ce modèle ?

Exercice 2 Montrez, pour un modèle AR(1), l'équivalence entre l'estimateur des MCO et l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle. Donnez l'expression de l'estimateur des MCO de ρ, le paramètre autorégressif.

Exercice 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1, 1)$ de la forme :

$$y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifiez votre réponse.

On suppose que les conditions initiales sont telles que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculez l'espérance (on notera μ l'espérance). **(4)** Calculez les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculez l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculez l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$.

Exercice 4 Calculez les moments d'ordre 1 et 2 d'un processus ARMA(2,2) que nous supposerons stationnaire :

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2.