SÉRIES TEMPORELLES

UNIVERSITÉ DU MAINE (EXAMEN, L3)

EXERCICE 1 Soient les fonctions d'auto-corrélation et de corrélation partielle suivantes :

h	0	1	2	3	4	5
$\rho(h)$	1	0,70	0,49	0,34	0,24	0,17
$r(h)$	–	0,70	0,00	0,00	0,00	0,00

Ces fonctions sont générées par un processus ARMA(p,q) avec p égal à zéro ou un, q égal à zéro ou un et $p+q \leq 2$. En justifiant votre réponse, déterminer la forme du processus qui a généré $\rho(h)$ et $r(h)$. Que pouvez-vous dire des paramètres de ce modèle ?

EXERCICE 2 Montrer, pour un modèle AR(1), l'équivalence entre l'estimateur des MCO et l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle. Donner l'expression de l'estimateur des MCO de ρ, le paramètre autorégressif.

EXERCICE 3 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

(1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible ? Justifier votre réponse.

On suppose que les conditions initiales sont telles que le processus est stationnaire au second ordre.

(2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2 ? **(3)** Calculer l'espérance (on notera μ l'espérance). **(4)** Calculer les autocovariances d'ordre 0 et 1 (on notera $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$). **(5)** Calculer l'autocovariance d'ordre 2 (on notera $\gamma(2)$). **(6)** Calculer l'autocovariance d'ordre h (on notera $\gamma(h)$) pour tout $h > 2$.

EXERCICE 4 Soit le modèle état mesure suivant :

$$\begin{aligned} y_t &= z_t + \varepsilon_t \\ z_t &= z_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_t \equiv BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\eta_t \equiv BB(0, \sigma_\eta^2)$. Le second processus, $\{z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ est une marche aléatoire, $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ et une marche aléatoire «bruitée» et on notera $\kappa = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2$ le ratio signal-bruit. **(1)** Montrer que la variance de $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas définie. Donner l'intuition. **(2)** Calculer la fonction d'autocovariance de $\{\Delta y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. **(3)** Conclure sur la nature du processus $\{\Delta y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. **(4)** Identifier les paramètres du modèle.