

SÉRIES TEMPORELLES

(Éléments de correction)

UNIVERSITÉ DU MANS (2^{NDE} SESSION, L3)

Mardi 16 juin 2026

EXERCICE 1

(1) Le processus s'écrit $Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ avec $\Theta(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2$, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire *finie* d'un bruit blanc. La suite des coefficients $(1, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0, \dots)$ est trivialement absolument sommable : un processus MA d'ordre fini est *toujours* stationnaire au second ordre, sans aucune condition sur les coefficients. Aucun calcul n'est nécessaire.

(2) Posons $\theta_1 = -\frac{5}{6}$ et $\theta_2 = \frac{1}{6}$, de sorte que $Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$.

Espérance. Par linéarité, $\mathbb{E}[Y_t] = (1 + \theta_1 + \theta_2) \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$.

Autocovariances. Comme les innovations sont non corrélées et de variance σ_ε^2 , seuls les croisements de même date subsistent :

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = \left(1 + \frac{25}{36} + \frac{1}{36}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \frac{31}{18}\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma(1) = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2 = \theta_1(1 + \theta_2)\sigma_\varepsilon^2 = -\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}\sigma_\varepsilon^2 = -\frac{35}{36}\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma(2) = \theta_2\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{6}\sigma_\varepsilon^2.$$

Pour $h \geq 3$, les trois termes de Y_t et les trois termes de Y_{t-h} ne partagent aucune innovation commune, donc :

$$\gamma(h) = 0, \quad h \geq 3.$$

On retrouve la propriété caractéristique d'un MA(q) : la fonction d'autocovariance est nulle au-delà de l'ordre $q = 2$ (*courte mémoire*).

(3) La fonction d'autocorrélation $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$ vaut :

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(1) = \frac{-35/36}{31/18} = -\frac{35}{62}, \quad \rho(2) = \frac{1/6}{31/18} = \frac{3}{31},$$

et $\rho(h) = 0$ pour $h \geq 3$.

(4) Le polynôme retard moyenne mobile est $\Theta(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2$. Ses racines vérifient $\frac{1}{6}L^2 - \frac{5}{6}L + 1 = 0$, soit $L^2 - 5L + 6 = 0$, dont les racines sont $L_1 = 2$ et $L_2 = 3$. Toutes deux sont strictement supérieures à 1 en module : le processus est **inversible**. On a la factorisation :

$$\Theta(L) = \frac{1}{6}(L-2)(L-3) = \left(1 - \frac{1}{2}L\right) \left(1 - \frac{1}{3}L\right).$$

Comme les racines sont > 1 , on peut réécrire $\{Y_t\}$ sous la forme d'un AR(∞) : $\Theta(L)^{-1}Y_t = \varepsilon_t$.

EXERCICE 2

(1) Le polynôme retard auto-régressif est $\Phi(L) = 1 - L + \frac{1}{2}L^2$. Ses racines vérifient $\frac{1}{2}L^2 - L + 1 = 0$, soit $L^2 - 2L + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Les racines sont *complexes conjuguées* :

$$L_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i,$$

de module $|L_{1,2}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$. Les deux racines étant de module strictement supérieur à 1, le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre. La particularité ici est que ces racines sont *complexes*, ce qui annonce une fonction d'autocovariance *pseudo-périodique* (oscillations amorties).

(2) Sous stationnarité, $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$ pour tout t . En prenant l'espérance de l'équation du processus :

$$\mu = 1 + \mu - \frac{1}{2}\mu \implies \frac{1}{2}\mu = 1 \implies \mu = 2.$$

(3) Posons $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$, qui vérifie $\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_{t-1} - \frac{1}{2}\tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t$. En multipliant par $\tilde{Y}_{t-h}$ et en prenant l'espérance, on obtient les équations de Yule-Walker. Pour $h \geq 1$ (en utilisant $\gamma(-h) = \gamma(h)$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-h}] = 0$) :

$$\gamma(h) = \gamma(h-1) - \frac{1}{2}\gamma(h-2),$$

et pour $h = 0$ (avec $\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_t] = \sigma_\varepsilon^2$) :

$$\gamma(0) = \gamma(1) - \frac{1}{2}\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2.$$

Pour $h = 1$: $\gamma(1) = \gamma(0) - \frac{1}{2}\gamma(1)$, soit $\frac{3}{2}\gamma(1) = \gamma(0)$, d'où :

$$\gamma(1) = \frac{2}{3}\gamma(0).$$

Pour $h = 2$: $\gamma(2) = \gamma(1) - \frac{1}{2}\gamma(0) = \frac{2}{3}\gamma(0) - \frac{1}{2}\gamma(0) = \frac{1}{6}\gamma(0)$, soit :

$$\gamma(2) = \frac{1}{6}\gamma(0).$$

Pour $h = 0$: en substituant ces relations,

$$\gamma(0) = \frac{2}{3}\gamma(0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{7}{12}\gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2,$$

soit $\frac{5}{12}\gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2$. Finalement :

$$\gamma(0) = \frac{12}{5}\sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma(1) = \frac{8}{5}\sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma(2) = \frac{2}{5}\sigma_\varepsilon^2.$$

(4) La relation de récurrence est, pour tout $h \geq 1$:

$$\gamma(h) = \gamma(h-1) - \frac{1}{2}\gamma(h-2).$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - r + \frac{1}{2} = 0$, dont les racines sont $r_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}$ (inverses des racines $L_{1,2} = 1 \pm i$). En module et argument :

$$r_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\pi/4}, \quad |r_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg = \pm \frac{\pi}{4}.$$

La solution générale d'une récurrence à racines complexes conjuguées s'écrit :

$$\gamma(h) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^h \left[A \cos\left(\frac{\pi}{4}h\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{4}h\right) \right].$$

Les constantes se déterminent par les conditions initiales $\gamma(0) = \frac{12}{5}\sigma_\varepsilon^2$ et $\gamma(1) = \frac{8}{5}\sigma_\varepsilon^2$. En $h = 0$: $A = \gamma(0) = \frac{12}{5}\sigma_\varepsilon^2$. En $h = 1$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(A + B) = \gamma(1)$, donc $A + B = \frac{16}{5}\sigma_\varepsilon^2$ et $B = \frac{4}{5}\sigma_\varepsilon^2$. Ainsi :

$$\gamma(h) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^h \left[\frac{12}{5} \cos\left(\frac{\pi}{4}h\right) + \frac{4}{5} \sin\left(\frac{\pi}{4}h\right) \right] \sigma_\varepsilon^2.$$

Commentaire. La fonction d'autocorrélation $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$ décroît en module comme $(1/\sqrt{2})^h$ (la mémoire s'estompe), mais en *oscillant* : les racines complexes d'argument $\pm\pi/4$ engendrent une composante pseudo-périodique de période $2\pi/(\pi/4) = 8$. Le processus présente donc des cycles amortis d'une longueur d'environ 8 périodes.

EXERCICE 3

(1) En appliquant le théorème de Bayes de manière itérée :

$$f(\mathcal{Y}_T; \boldsymbol{\theta}) = f(y_1; \boldsymbol{\theta}) \prod_{t=2}^T f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1; \boldsymbol{\theta}).$$

Pour un AR(1), la propriété de Markov assure que $f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) = f(y_t | y_{t-1})$, avec

$$y_t | y_{t-1} \sim \mathcal{N}(c + \varphi y_{t-1}, \sigma_\varepsilon^2).$$

La première observation suit, elle, sa loi marginale *stationnaire* :

$$y_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma(0)), \quad \mu = \frac{c}{1 - \varphi}, \quad \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi^2}.$$

La vraisemblance exacte s'écrit donc :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{Y}_T) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(0)}} e^{-\frac{(y_1 - \mu)^2}{2\gamma(0)}}}_{f(y_1; \boldsymbol{\theta})} \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} e^{-\frac{(y_t - c - \varphi y_{t-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}.$$

(2) La vraisemblance conditionnelle s'obtient en traitant y_1 comme donné (déterministe) plutôt qu'aléatoire, c'est-à-dire en omettant le facteur $f(y_1; \boldsymbol{\theta})$:

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{Y}_T | y_1) = \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} e^{-\frac{(y_t - c - \varphi y_{t-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}.$$

La log-vraisemblance conditionnelle est :

$$\ln \mathcal{L}_c = -\frac{T-1}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^T (y_t - c - \varphi y_{t-1})^2.$$

(3) À σ_ε^2 fixé, seul le dernier terme dépend de (c, φ) , et le maximiser revient à *minimiser* la somme des carrés des résidus :

$$S(c, \varphi) = \sum_{t=2}^T (y_t - c - \varphi y_{t-1})^2.$$

C'est exactement le critère des moindres carrés ordinaires pour la régression de y_t sur une constante et y_{t-1} , à partir de $t = 2$. En posant :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_{T-1} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{X}$ étant de dimension $(T - 1) \times 2$, l'estimateur est :

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

On obtient enfin l'estimateur de σ_ε^2 par la condition de premier ordre par rapport à σ_ε^2 , en remplaçant (c, φ) par leurs estimations :

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (y_t - \hat{c} - \hat{\varphi}y_{t-1})^2.$$

(4) Sous $H_0 : \varphi = 0$, la variance asymptotique $1 - \varphi^2$ vaut 1. La loi limite donne donc directement, en remplaçant l'écart-type asymptotique par $\sqrt{1 - \hat{\varphi}^2}$, la statistique de test (de type Wald / ratio de Student) :

$$t = \frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{(1 - \hat{\varphi}^2)/T}} = \frac{\sqrt{T} \hat{\varphi}}{\sqrt{1 - \hat{\varphi}^2}} \xrightarrow[H_0]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

De façon équivalente, $t^2 \xrightarrow{d} \chi^2(1)$. **Règle de décision** au seuil de 5 % : on rejette H_0 (présence de dynamique auto-régressive) si $|t| > 1,96$, et on ne rejette pas sinon. Sous H_0 , le processus se réduit à $y_t = c + \varepsilon_t$, c'est-à-dire un bruit blanc d'espérance c .

EXERCICE 4

(1) Pour $\{Y_t\}$ avec $\theta = 2$:

$$\gamma_Y(0) = (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2 = 5\sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma_Y(1) = \theta\sigma_\varepsilon^2 = 2\sigma_\varepsilon^2,$$

et $\gamma_Y(h) = 0$ pour $h \geq 2$. D'où :

$$\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{2}{5}.$$

(2) Pour $\{\tilde{Y}_t\}$ avec coefficient $\frac{1}{2}$ et variance d'innovation $\sigma_u^2 = 4\sigma_\varepsilon^2$:

$$\gamma_{\tilde{Y}}(0) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) \sigma_u^2 = \frac{5}{4} \cdot 4\sigma_\varepsilon^2 = 5\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma_{\tilde{Y}}(1) = \frac{1}{2} \sigma_u^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\sigma_\varepsilon^2 = 2\sigma_\varepsilon^2,$$

et $\gamma_{\tilde{Y}}(h) = 0$ pour $h \geq 2$. Les deux processus ont donc exactement la même fonction d'autocovariance (et la même autocorrélation $\rho(1) = \frac{2}{5}$).

Conclusion. Les moments d'ordre 1 et 2 ne suffisent pas à identifier de manière unique un processus MA : à toute représentation de paramètre θ et de variance σ_ε^2 correspond une représentation « jumelle » de paramètre $1/\theta$ et de variance $\theta^2\sigma_\varepsilon^2$ possédant les mêmes autocovariances. Plus généralement, remplacer une racine du polynôme $\Theta(L)$ par son inverse (en ajustant la variance) laisse la structure de covariance inchangée.

(3) Définition. Un processus $\text{MA}(q)$ est *inversible* s'il peut se réécrire comme un $\text{AR}(\infty)$, c'est-à-dire si l'innovation s'exprime comme une combinaison linéaire *convergente* du présent et du passé du processus observé. La condition est que toutes les racines du polynôme $\Theta(z)$ soient de module strictement supérieur à 1.

Pour $\{Y_t\}$, $\Theta(L) = 1 + 2L$ a pour racine $L = -\frac{1}{2}$, de module $\frac{1}{2} < 1$: cette représentation **n'est pas inversible**. Pour $\{\tilde{Y}_t\}$, $\Theta(L) = 1 + \frac{1}{2}L$ a pour racine $L = -2$, de module $2 > 1$: c'est la représentation **inversible**, celle que l'on retient. On a alors $\tilde{Y}_t = (1 + \frac{1}{2}L)u_t$, d'où, en inversant le polynôme retard (licite car $|\frac{1}{2}| < 1$) :

$$u_t = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}L} \tilde{Y}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i \tilde{Y}_{t-i} = \tilde{Y}_t - \frac{1}{2}\tilde{Y}_{t-1} + \frac{1}{4}\tilde{Y}_{t-2} - \dots$$

La série des coefficients $((-1/2)^i)_i$ est absolument sommable, ce qui garantit la convergence de cette représentation $\text{AR}(\infty)$.

(4) La condition d'inversibilité est imposée pour deux raisons liées. (i) *Identification* : comme le montre la question 2, plusieurs jeux de paramètres engendrent la même fonction d'autocovariance ; en se restreignant à la représentation inversible (racines > 1 en module), on sélectionne une représentation *unique*, ce qui rend les paramètres identifiables à partir des données. (ii) *Reconstruction de l'innovation et prévision* : seule la représentation inversible permet d'écrire l'innovation courante u_t comme une fonction convergente du passé *observable* $\{Y_t, Y_{t-1}, \dots\}$; c'est indispensable pour reconstruire les résidus lors de l'estimation et pour former des prévisions à partir de l'information disponible.

Remarque. Les exercices 1, 2 et 4 illustrent la dualité fondamentale du cours : un AR stationnaire admet une représentation $\text{MA}(\infty)$ (inversion du polynôme auto-régressif quand ses racines sont > 1), et un MA inversible admet une représentation $\text{AR}(\infty)$ (inversion du polynôme moyenne mobile quand ses racines sont > 1). La fonction d'autocovariance d'un MA s'annule au-delà de l'ordre q (courte mémoire), tandis que celle d'un AR décroît géométriquement sans jamais s'annuler — en oscillant lorsque les racines sont complexes.