Séries temporelles

Université du Maine (Correction du partiel, L3)

Exercice 1 On remarque que la fonction d'autocorrélation décroît de façon géométrique et que la fonction d'autocorrélation partielle est nulle à partir du rang deux. Ces fonctions sont donc générées par un processus ARMA(p,q) avec $p = 1$ et $q = 0$, il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre 1. Nous savons que la fonction d'autocorrélation d'un AR(1) est de la forme :

$$\rho(h) = \rho^h$$

pour tout $h > 0$. Clairement le paramètre autorégressif est égal à 0,7. On ne peut rien dire de la variance de l'innovation du processus stochastique.

Exercice 2 Commençons par écrire la vraisemblance conditionnelle du processus AR(1). Notons $\mathcal{Y}_T = \{y_1, \dots, y_T\}$ l'échantillon disponible. Le processus générateur des données et de la forme :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε_t un bruit blanc Gaussien d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 que nous supposerons connue (c'est-à-dire que nous ne cherchons pas à estimer). La vraisemblance est la densité de l'échantillon :

$$\mathcal{L}(\rho; \mathcal{Y}_T) = p(y_1, \dots, y_T)$$

Puisque les y_t ne sont pas indépendants, il n'est pas possible d'écrire cette densité jointe comme un produit de densités marginales. Mais en utilisant le théorème de Bayes, on peut écrire cette densité jointe comme un produit de densité conditionnelle :

$$\mathcal{L}(\rho; \mathcal{Y}_T) = p(y_T|y_{T-1}, \dots, y_1)p(y_{T-1}|y_{t-2}, \dots, y_1) \dots p(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1) \dots p(y_2|y_1)$$

ou, puisque y_t ne dépend que de y_{t-1}, de façon équivalente :

$$\mathcal{L}(\rho; \mathcal{Y}_T) = p(y_T|y_{T-1})p(y_{T-1}|y_{t-2}) \dots p(y_t|y_{t-1}) \dots p(y_2|y_1)$$

soit de façon plus ramassée :

$$\mathcal{L}(\rho; \mathcal{Y}_T) = \prod_{t=2}^{T} p(y_t|y_{t-1})$$

Or nous savons que :

$$y_t|y_{t-1} \sim \mathcal{N}\left(\rho y_{t-1}, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

et que donc la densité conditionnelle de $y_t|y_{t-1}$ est :

$$p(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(y_t-\rho y_{t-1})^2}$$

En substituant dans l'expression de la vraisemblance, on obtient :

$$\mathcal{L}(\rho; \mathcal{Y}_T) = \prod_{t=2}^{T} \frac{1}{\sigma_\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(y_t-\rho y_{t-1})^2}$$

ou de façon équivalente :

$$\mathcal{L}(\rho; \mathcal{Y}_T) = \left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{-\frac{T-1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t-\rho y_{t-1})^2}$$

maximiser la vraisemblance par rapport à ρ revient à minimiser la somme sous l'exponentielle. C'est précisément l'objectif des MCO puisque l'on reconnaît ici la somme des carrés des résidus. L'estimateur des MCO, obtenu en minimisant la somme des carrés des résidus ou en maximisant la vraisemblance conditionnelle, est :

$$\hat{\rho}_T = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2}$$

EXERCICE 3 Soit $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un ARMA$(1,1)$ de la forme :

$$y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1. **(1)** Ce processus est asymptotiquement stationnaire et inversible car les racines des polynôme retards de la partie autorégressive et de la partie moyenne mobile (2 et 3) sont supérieures à un en module. **(2)** Si les conditions initiales sont telles que le processus stochastique est stationnaire au second ordre, alors les moments d'ordre un et deux sont invariants. Dans la suite on exploite cette propriété. **(3)** Appliquons l'opérateur espérance à la définition du processus stochastique :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[y_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}]$$

Par définition de ε_t, il vient :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[y_{t-1}]$$

puisque le moment d'ordre un est invariant, on a encore :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[y_t]$$

et donc

$$\mathbb{E}[y_t] = 0$$

(4) En multipliant l'équation qui définit le processus stochastique par y_t puis en appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[y_t y_{t-1}] + \mathbb{E}[y_t \varepsilon_t] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[y_t \varepsilon_{t-1}]$$

c'est-à-dire, par définition de la fonction d'autocovariance :

$$\gamma(0) = \frac{1}{2}\gamma(1) + \mathbb{E}[y_t \varepsilon_t] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[y_t \varepsilon_{t-1}]$$

En substituant la définition de y_t dans les deux derniers termes :

$$\gamma(0) = \frac{1}{2}\gamma(1) + \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_t\right] - \frac{1}{3}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_{t-1}\right]$$

En développant (sachant que $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$ pour tout $t \neq s$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_t y_{t-s}] = 0$ pour tout $s > 0$ car ε_t est une innovation), il vient :

$$\gamma(0) = \frac{1}{2}\gamma(1) + \sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{9}\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{6}\mathbb{E}\left[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \frac{1}{2}\gamma(1) + \sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{9}\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{6}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(0) = \frac{1}{2}\gamma(1) + \frac{17}{18}\sigma_\varepsilon^2$$

En multipliant l'équation qui définit le processus stochastique par y_{t-1} puis en appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\gamma(1) = \frac{1}{2}\gamma(0) + \mathbb{E}[y_{t-1}\varepsilon_t] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \frac{1}{2}\gamma(0) - \frac{1}{3}\sigma_\varepsilon^2$$

Les autocovariances $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont donc la solution d'un système de deux équations linéaires :

$$\begin{cases} \gamma(0) &= \frac{1}{2}\gamma(1) + \frac{17}{18}\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma(1) &= \frac{1}{2}\gamma(0) - \frac{1}{3}\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

En substituant la seconde équation dans la première, on obtient :

$$\gamma(0) = \frac{28}{27}\sigma_\varepsilon^2$$

puis en substituant ce résultat dans la seconde équation :

$$\gamma(1) = \frac{5}{27}\sigma_\varepsilon^2$$

(5) En multipliant l'équation qui définit le processus stochastique par y_{t-2} puis en appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\gamma(2) = \frac{1}{2}\gamma(1) + \mathbb{E}[y_{t-2}\varepsilon_t] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[y_{t-2}\varepsilon_{t-1}]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(2) = \frac{1}{2}\gamma(1)$$

et donc :

$$\gamma(2) = \frac{5}{54}\sigma_\varepsilon^2$$

(6) Plus généralement, on a :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\gamma(h-1)$$

pour tout $h \geq 2$. À partir de l'ordre deux, la fonction d'autocorrélation est gouvernée par la partie autorégressive du processus stochastique.

EXERCICE 4 Soit le processus ARMA(2,2) stationnaire :

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2. En appliquant l'opérateur espérance il vient :

$$\mathbb{E}[y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[y_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[y_{t-2}]$$

puisque ε_t est une variable aléatoire d'espérance nulle. Comme l'espérance est invariante, on a encore :

$$\mathbb{E}[y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[y_t] + \varphi_2 \mathbb{E}[y_t]$$

soit de façon équivalente :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

En multipliant l'équation qui définit l'ARMA(2,2) par $z_t = y_t - \mathbb{E}[y_t]$ (le processus centré) puis en appliquant l'espérance, il vient :

$$\gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \mathbb{E}[z_t\varepsilon_t] - \theta_1\mathbb{E}[z_t\varepsilon_{t-1}] - \theta_2\mathbb{E}[z_t\varepsilon_{t-2}]$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2 \\ - \theta_1\mathbb{E}\left[(\varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})\,\varepsilon_{t-1}\right] \\ - \theta_2\mathbb{E}\left[(\varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})\,\varepsilon_{t-2}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1\varphi_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 - \theta_2\varphi_2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2 \\ - \theta_2\varphi_1\mathbb{E}[z_{t-1}\varepsilon_{t-2}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1\varphi_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 - \theta_2\varphi_2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2 \\ - \theta_2\varphi_1\mathbb{E}\left[(\varphi_1 z_{t-2} + \varphi_2 z_{t-3} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})\,\varepsilon_{t-2}\right]\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1\varphi_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 - \theta_2\varphi_2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2 - \theta_2\varphi_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2\theta_1\varphi_1\sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_1\varphi_1 - \theta_2\varphi_2 - \theta_2\varphi_1^2 + \theta_2\theta_1\varphi_1\right)\sigma_\varepsilon^2$$

Nous avons une expression de l'autocovariance d'ordre zéro en fonction des autocovariances d'ordre un et deux inconnues. Il nous reste à obtenir des expressions pour ces moments. En multipliant l'équation qui définit l'ARMA(2,2) centré par z_{t-1} puis en appliquant l'espérance, il vient :

$$\gamma(1) = \varphi_1\gamma(0) + \varphi_2\gamma(1) + \mathbb{E}\left[z_{t-1}\varepsilon_t\right] - \theta_1\mathbb{E}\left[z_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right] - \theta_2\mathbb{E}\left[z_{t-1}\varepsilon_{t-2}\right]$$

$$\Leftrightarrow (1-\varphi_2)\gamma(1) = \varphi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma_\varepsilon^2 - \theta_2\mathbb{E}\left[\left(\varphi_1 z_{t-2} + \varphi_2 z_{t-3} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3}\right)\varepsilon_{t-2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma(0) + \frac{\theta_2\theta_1 - \theta_1 - \theta_2\varphi_1}{1-\varphi_2}\sigma_\varepsilon^2$$

En suivant la même démarche, on trouve aussi :

$$\gamma(2) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(0) - \theta_2\sigma_\varepsilon^2$$

Nous disposons donc d'un système à trois équations – trois inconnues pour $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$. Les autocovariances suivantes sont données par :

$$\gamma(h) = \varphi_1\gamma(h-1) + \varphi_2\gamma(h-2)$$

À partir du rang trois, la fonction d'autocovariance est déterminée à partir de la partie autorégressive du processus ARMA(2,2). Après quelques manipulations que je n'ai pas le courage de reporter ici, j'obtiens :

$$\gamma(0) = \frac{\varphi_1(1+\varphi_2)(\theta_2\theta_1 - \theta_1 - \theta_2\varphi_1) - (1-\varphi_2)\left[1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_1\varphi_1 - \theta_2\varphi_1^2 + \theta_2\theta_1\varphi_1\right]}{1 - \varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2)}\sigma_\varepsilon^2$$

On déduit facilement $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$