Séries temporelles
(Éléments de correction)

Université du Maine (Partiel, L3)

Exercice 1 Dans le cas du premier processus stochastique, y_t et y_{t-2} ne sont pas indépendants car y_{t-1} dépend de y_{t-2} (et bien sûr ε_{t-1}) via y_{t-1}. Il suffit d'écrire la définition du processus en $t-1$ pour s'en convaincre. Dans le cas du deuxième processus, il y a indépendance entre y_t et y_{t-2}. Dans ce cas, puisque le processus stochastique est un MA(1), y_t dépend de ε_t et ε_{t-1} alors que y_{t-2} dépend de ε_{t-2} et ε_{t-3}. Il n'y a donc pas d'innovations communes ; comme ces innovations sont indépendantes (ε_t est un bruit blanc) on a nécessairement l'indépendance de y_t et y_{t-2}. Enfin, dans le cas du troisième processus stochastique, on n'a pas la propriété d'ndépendance. En notant qu'il s'agit d'un MA(2), on voit que y_t et y_{t-2} dépendent de ε_{t-2}.

Exercice 2 Reportez-vous au cours... Vous devez trouver que l'esimateur des MCO est identique à l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle, et noter que celui converge vers l'estimateur du maximum de vraisemblance exacte lorque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Exercice 3 **(1)** Le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre car les racines du polynôme retard auto-régressif ($^1/_2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$) sont supérieures à 1 en module. Le processus est inversible car la racine du polynôme retard moyenne mobile (3) est supérieure à 1 en module. On note que les racines sont différentes, nous travaillons donc bien sur la représentation minimale d'une ARMA(2,1). **(2)** Les moments d'ordres 1 et 2 sont donc invariants. **(3)** L'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{1}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1$$

(4) On doit trouver :

$$\gamma(0) = \frac{17}{15}$$

$$\gamma(1) = \frac{1}{30}$$

et

$$\gamma(2) = -\frac{11}{30}$$

(5) L'autocovariance d'ordre 3 est :

$$\gamma(2) = -\frac{2}{15}$$

(6) Plus généralement, on a :

$$\gamma(h) = \frac{1}{3}\gamma(h-1) - \frac{1}{3}\gamma(h-2)$$

dès lors que l'on a passé l'influcence de la partie MA (ie $h > 1$). **(7)** La fonction d'auto-corrélation est une normalisation de la fonction d'auto-covariance, de façon générale on a :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

EXERCICE 4 Une solution détaillée est disponible sur ma page (dans la section vieilleries en vrac).

EXERCICE 5 **(1)** On peut réécrire la loi d'évolution du stock de capital physique en utilisant des polynômes retard. On a :

$$(1 - \eta_{kk}L)k_t = \eta_{ka}a_{t-1}$$

Par ailleurs on a :

$$(1 - \rho L)a_t = \varepsilon_t$$

Soit par inversion du polynôme retard et substitution dans la loi d'évolution du stock de capital physique :

$$(1 - \eta_{kk}L)k_t = \eta_{ka}(1 - \rho L)^{-1}\varepsilon_{t-1}$$

soit encore en multipliant les deux membres par $(1 - \rho L)$:

$$(1 - \eta_{kk}L)(1 - \rho L)k_t = \eta_{ka}\varepsilon_{t-1}$$

Le stock de capital est donc un processus stochastipe de type AR(2). En substiuant dans la fonction de production (en log) il vient :

$$y_t = \alpha(1 - \eta_{kk}L)^{-1}(1 - \rho L)^{-1}\eta_{ka}\varepsilon_{t-1} + (1 - \rho L)^{-1}\varepsilon_t$$

Soit en inversant le polynôme retard d'ordre 2 :

$$(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)y_t = \alpha\eta_{ka}\varepsilon_{t-1} + (1-\eta_{kk})\varepsilon_t$$

ou encore :

$$(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)y_t = \varepsilon_t - (\eta_{kk} - \alpha\eta_{ka})\varepsilon_{t-1}$$

et en développant le polynôme retard d'ordre deux sur le membre de gauche :

$$y_t = (\eta_{kk} + \rho)y_{t-1} - \eta_{kk}\rho y_{t-2} + \varepsilon_t - (\eta_{kk} - \alpha\eta_{ka})\varepsilon_{t-1}$$

Il s'agit bien dn processus ARMA(2,1). **(2)** De ce qui précède, on voit directement que les racines du polynôme retard associé à la partie autorégressive sont η_{kk} et ρ. La condition de stationarité est donc η_{kk} plus peit que 1 (en valeur absolue), c'est-à-dire la stabilité de la dynmique du capital physique (en plus de celle de la productivité).