SÉRIES TEMPORELLES (Éléments de correction)

UNIVERSITÉ DU MAINE (PARTIEL, L3)

EXERCICE 1 Dans une très majorité de copies, les étudiants confondent le processus MA(1) et le processus AR(1). Un processus MA(1) est défini de la façon suivante :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance σ^2_ε. L'hypothèse de normalité de ε est essentielle pour écrire (simplement) la vraisemblance.

Il n'est pas possible d'estimer ce processus par les MCO car les variables explicatives (ε_t et ε_{t-1}) ne sont pas observées.

Pour l'écriture des fonctions de vraisemblance (exacte et conditionnelle), se reporter au cours.

Pour écrire la vraisemblance exacte, on procède en écrivant la densité jointe de l'échantillon $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_T)'$. L'échantillon suit une loi normale multivariée d'espérance nulle, la variance est donnée par la fonction d'autocovariance du processus :

$$\gamma(0) = (1+\theta^2)\sigma^2_\varepsilon$$

$$\gamma(1) = -\theta\sigma^2_\varepsilon$$

et

$$\gamma(h) = 0 \quad \forall h > 1$$

On a

$$y \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$$

avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{0}$ un vecteur nul de dimension $T \times 1$. La vraisemblance exacte est donc de la forme :

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma^2_\varepsilon; \mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\Sigma^{-1}\mathbf{y}}$$

Dans le cours on donne plus de détail sur l'inversion de la matrice Σ et le calcul de son déterminant en exploitant sa forme très particulière.

Pour écrire la vraisemblance conditionnelle, on note que l'on peut exprimer ε_t en fonction de y_t et de ε_{t-1} :

$$\varepsilon_t = y_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

En initialisant ε_0 à 0 (par exemple) et en utilisant les observables, il est alors possible de construire récursivement la chronique des ε_t pour t allant de 1 à T. On sait que ces ε_t sont identiquement et indépendemment normalement distribués d'espérance nulle et de variance σ^2_ε. On déduit la vraisemblance directement (voir le cours).

EXERCICE 2 **(1)** Le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre car la racine du polynôme retard auto-régressif (3) est supérieure à 1 en module. Le processus est inversible car la racine du polynôme retard moyenne mobile (3/2) est supérieure à 1 en module. On note que les racines sont différentes, nous travaillons donc bien sur la représentation minimale d'une ARMA(1,1). **(2)** Les moments d'ordres 1 et 2 sont donc invariants. **(3)** L'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

(4) On doit trouver :

$$\gamma(0) = \frac{9}{8}$$

et

$$\gamma(1) = -\frac{7}{24}$$

(5) L'autocovariance d'ordre 2 est :

$$\gamma(2) = -\frac{7}{72}$$

(6) Plus généralement, on a :

$$\gamma(h) = \frac{1}{3}\gamma(h-1)$$

pour tout $h > 1$. La fonction d'auto-corrélation est une normalisation de la fonction d'auto-covariance, de façon générale on a :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

et donc :

$$\rho(0) = 1$$

$$\rho(1) = -21/64$$

et

$$\rho(h) = \frac{1}{3}\rho(h-1)$$

pour $h > 1$.

EXERCICE 3 Une solution détaillée est disponible sur ma page (dans la section vieilleries en vrac).

EXERCICE 4 **(1)** Par définition, nous avons :

$$\gamma_c(h) = \mathbb{E}\left[y_t^c y_{t-h}^c\right]$$

en supposant que la composante cyclique est de moyenne nulle (sinon il faut retrancher la moyenne). En substituant la définition, il vient :

$$\begin{aligned}
\gamma_c(h) &= \mathbb{E}\left[\Delta y_t \Delta y_{t-h}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(y_t - y_{t-1})(y_{t-h} - y_{t-h-1})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[y_t y_{t-h} - y_t y_{t-h-1} - y_{t-1} y_{t-h} + y_{t-1} y_{t-h-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[y_t y_{t-h}\right] + E\left[y_{t-1} y_{t-h-1}\right] - \mathbb{E}\left[y_{t-1} y_{t-h}\right] - \mathbb{E}\left[y_t y_{t-h-1}\right] \\
&= 2\gamma(h) - \gamma(h-1) - \gamma(h+1)
\end{aligned}$$

où $\gamma(h)$ est la fonction d'autocovariance du processus y_t. **(2)** On montre facilement que la fonction d'auto-covariance du processus AR(1) est :

$$\gamma(h) = \rho^h \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

En substituant dans l'expression de la fonction d'auto-covariance de la composante cyclique :

$$\begin{aligned}
\gamma_c(h) &= (2\rho^h - \rho^{h-1} - \rho^{h+1})\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \\
&= (2\rho - 1 - \rho^2)\rho^{h-1}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \\
&= -(\rho-1)^2\rho^{h-1}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}
\end{aligned}$$

Clairement $\gamma_c(h) < 0$ dès lors que $\rho \in]0,1[$, sinon le signe de la fonction d'autocovariance est alterné.