Soit le processus ARMA(2,1)

$$y_t = 1 + \frac{1}{3} y_{t-1} - \frac{1}{3} y_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

avec $V[\varepsilon_t] = 1$. Le processus centré $z_t = y_t - \mathbb{E}[y_t]$ est défini par :

$$z_t = \frac{1}{3} z_{t-1} - \frac{1}{3} z_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1} \qquad (*)$$

En multipliant par z_t puis prenant l'espérance il vient :

$$\gamma(0) = \frac{1}{3}\gamma(1) - \frac{1}{3}\gamma(2) + \mathbb{E}[\varepsilon_t z_t] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} z_t]$$

où

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t z_t] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_t\left(\frac{1}{3} z_{t-1} - \frac{1}{3} z_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t z_{t-1}]}_{0} - \frac{1}{3}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t z_{t-2}]}_{0} + \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] - \frac{1}{3}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}]}_{0}$$

car $\varepsilon_t \perp z_{t-s}$ $\forall s \geq 1$.

car ε est iid

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_t z_t] = 1 \quad \text{la variance de } \varepsilon_t$$

et

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} z_t] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-1}\left(\frac{1}{3} z_{t-1} - \frac{1}{3} z_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} z_{t-1}] - \frac{1}{3}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} z_{t-2}]}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t]}_{0} - \frac{1}{3}\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

même chose car les moments ne dépendent pas de t

Remarque en général ce terme n'est pas nul.

On a donc :

$$\boxed{\gamma(0) = \frac{1}{3}\gamma(1) - \frac{1}{3}\gamma(2) + 1}$$

En multipliant (*) par z_{t-1} puis en prenant l'espérance, on obtient

$$\gamma(1) = \frac{1}{3}\gamma(0) - \frac{1}{3}\gamma(1) + \mathbb{E}[\varepsilon_t z_t] - \frac{1}{3}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} z_{t-1}]}_{=1}$$

$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(1) = \frac{1}{4}\gamma(0) - \frac{1}{4}}$$

En multipliant (*) par z_{t-2} puis en prenant l'espérance, on obtient :

$$\boxed{\gamma(2) = \frac{1}{3}\gamma(1) - \frac{1}{3}\gamma(0)}$$

les termes avec des ε sont nuls en espérance car ε_t ou ε_{t-1} sont non corrélés avec z_{t-2}. Les trois premiers termes de la fonction d'autocovariance doivent vérifier

$$\begin{cases} \gamma(0) = \frac{1}{3}\gamma(1) - \frac{1}{3}\gamma(2) + 1 & (i) \\ \gamma(1) = \frac{1}{4}\gamma(0) - \frac{1}{4} & (ii) \\ \gamma(2) = \frac{1}{3}\gamma(1) - \frac{1}{3}\gamma(0) & (iii) \end{cases}$$

En substituant (ii) dans (iii) on exprime $\gamma(2)$ en fonction de $\gamma(0)$:

$$\gamma(2) = \frac{1}{12}\gamma(0) - \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\gamma(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(2) = -\frac{1}{4}\gamma(0) - \frac{1}{12} \qquad \text{(iii)}'$$

En substituant (ii) et (iii)' dans (i) on obtient une équation dont l'inconnue est $\gamma(0)$:

$$\gamma(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\gamma(0) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\gamma(0) + \frac{1}{12}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(0) = \frac{1}{12}\gamma(0) + \frac{1}{12}\gamma(0) - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(0)\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{36+1-3}{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(0) \cdot \frac{5}{6} = \frac{34}{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(0) = \frac{6}{5} \cdot \frac{17}{18}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\gamma(0) = \frac{17}{15}}$$

En substituant dans (ii), il vient :

$$\gamma(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{15} - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \frac{1}{4}\left(\frac{17-15}{15}\right)$$

$$\Leftrightarrow \gamma(1) = \frac{2}{15 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma(1) = \frac{1}{30}}$$

etc...