Modèles ARMA

Séries Temporelles

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Les modèles ARMA

- Dans ce chapitre, nous allons considérer une large classe de modèles linéaires qui permettent de construire des processus stochastiques à partir d'un bruit blanc $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$.
- **ARMA = AR + MA :**
  - **AR** : Auto-Régressif (Auto-Regressive)
  - **MA** : Moyenne Mobile (Moving Average)
- Ces modèles permettent de capturer différentes structures de dépendance temporelle de manières plus ou moins parcimonieuses.

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Le modèle MA(1)

- **Définition :** Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2 et d'espérance nulle. On définit le processus MA(1) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ par :

  $$Y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

  où θ est une constante réelle.

- Le processus Y_t est une combinaison linéaire des innovations ε à différentes dates.

- Caractérisons ce processus en calculant ses moments d'ordre 1 et 2.

Espérance du MA(1)

- **Calcul de l'espérance :**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}[\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \theta\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] \quad \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &= 0 - \theta \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

- L'espérance du processus MA(1) est nulle pour tout t.

Variance du MA(1)

- **Calcul de la variance :**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[Y_t] &= \mathbb{E}[Y_t^2] \quad (\text{car } \mathbb{E}[Y_t] = 0) \\
&= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2] \\
&= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 - 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2] \\
&= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] - 2\theta \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]}_{=0 \text{ (bruit blanc)}} + \theta^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] \\
&= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 \\
&= (1+\theta^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

- La variance est constante et ne dépend pas de t.

Fonction d'autocovariance du MA(1) (1/2)

- **Calcul de $\gamma(1)$:**

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2})] \\
&= \mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}] - \theta\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}] - \theta\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \theta^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]
\end{aligned}
$$

- Les termes $\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]$ sont nuls (bruit blanc).

- Donc :

$$\gamma(1) = -\theta\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = -\theta\sigma^2$$

Fonction d'autocovariance du MA(1) (2/2)

- **Calcul de $\gamma(h)$ pour $|h| \geq 2$:** Pour $|h| \geq 2$, les produits Y_t et Y_{t-h} n'ont aucune innovation ε en commun :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h} - \theta\varepsilon_{t-h-1})] = 0$$

- **Résumé :**

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| \geq 2 \end{cases}$$

- La fonction d'autocovariance est nulle au-delà du rang 1.

Fonction d'autocorrélation du MA(1)

- La fonction d'autocorrélation est :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| \geq 2 \end{cases}$$

- **Propriété importante :** On peut vérifier que $|\rho(1)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
  En effet, en étudiant la fonction $f(\theta) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$, on montre que son maximum est $\frac{1}{2}$ (atteint en $\theta = -1$) et son minimum est $-\frac{1}{2}$ (atteint en $\theta = 1$).

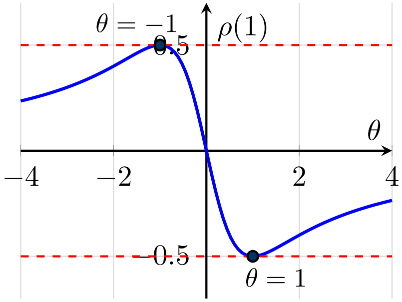
Démonstration : $|\rho(1)| \leq \frac{1}{2}$

Soit $f(\theta) = \dfrac{-\theta}{1+\theta^2}$. Calculons les extrema.

$$f'(\theta) = \frac{-(1+\theta^2) + \theta \cdot 2\theta}{(1+\theta^2)^2} = \frac{\theta^2 - 1}{(1+\theta^2)^2}$$

- $f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm 1$
- $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ (maximum)
- $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ (minimum)
- $\lim_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = 0$

Donc $\boxed{-\dfrac{1}{2} \leq \rho(1) \leq \dfrac{1}{2}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.



Processus MA(1) non centré

- **Définition :** On peut ajouter une constante dans la définition :

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

- Cela n'affecte que l'espérance, pas les moments d'ordre 2 puisque nous ne faisons que rajouter une constante (déterministe):
- $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$
- $\mathbb{V}[Y_t] = (1 + \theta^2)\sigma^2$ (inchangée)
- $\gamma(h)$ inchangée pour $h \neq 0$
- **Stationnarité :** Le processus MA(1) est **toujours stationnaire**, quelle que soit la valeur de θ.

Problème d'identification du MA(1)

- **Observation** : Si $\theta = a$, alors $\rho(1) = \dfrac{-a}{1+a^2}$.
  Si $\theta = \dfrac{1}{a}$, alors $\rho(1) = \dfrac{-1/a}{1+1/a^2} = \dfrac{-1/a}{(a^2+1)/a^2} = \dfrac{-a}{1+a^2}$.
- Autrement dit, pour $\theta = a$ et $\theta = 1/a$, le processus a les **mêmes propriétés** en termes de dépendance !
- $\Rightarrow$ Cela pose un **problème d'identification** : on ne peut pas distinguer ces deux modèles à partir des données.
- **Convention d'inversibilité** : Pour résoudre ce problème d'équivalence observationnelle, on impose $|\theta| < 1$.

Structure de dépendance du MA(1)

- **Remarque :** La structure de dépendance du MA(1) est très limitée :
  - Y_t est corrélé avec Y_{t-1} (covariance non nulle)
  - Y_t n'est **pas** corrélé avec Y_{t-h} pour $|h| \geq 2$
- L'autocorrélation non nulle à l'ordre 1 apparaît car deux Y consécutifs ont une innovation ε en commun. Les couples de variables Y plus éloignées dans le temps ne partagent aucun ε.

Densité spectrale du MA(1)

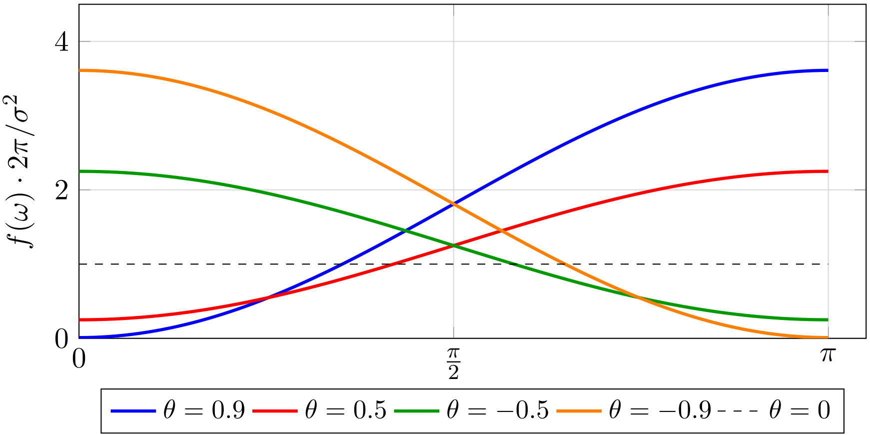
- **Rappel** : Pour un processus stationnaire, la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}$$

- Puisque $\gamma(h) = 0$ pour $|h| \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(-1)e^{i\omega} + \gamma(0) + \gamma(1)e^{-i\omega}\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[-\theta e^{i\omega} + (1+\theta^2) - \theta e^{-i\omega}\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[1 + \theta^2 - 2\theta\cos(\omega)\right] \end{aligned}$$

Densité spectrale du MA(1) : représentation graphique



$\theta > 0$: énergie concentrée aux **hautes fréquences** ($\omega \approx \pi$). $\theta < 0$: énergie concentrée aux **basses fréquences** ($\omega \approx 0$).

Le modèle MA(2)

- **Définition :** Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2. On définit le processus MA(2) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ par :
$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$
- On enrichit la structure d'autocorrélation en rajoutant des retards sur les innovations ε.

- **Remarque :** On pourrait ajouter une constante μ ; cela n'affecterait que l'espérance, comme dans le cas du MA(1).

Espérance et variance du MA(2)

- **Espérance :**
$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}] = 0$$
- **Variance :**
$$\begin{aligned}\mathbb{V}[Y_t] &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})^2] \\ &= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2\varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2\varepsilon_{t-2}^2 - 2\theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - 2\theta_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + 2\theta_1\theta_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]\end{aligned}$$
- Les termes croisés sont nuls (bruit blanc), donc :
$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \theta_1^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \theta_2^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

Autocovariance d'ordre 1 du MA(2)

- **Calcul de $\gamma(1)$:**

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})]\end{aligned}$$

- Seuls les produits d'innovations de même date sont non nuls :

- $-\theta_1\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1} = -\theta_1\varepsilon_{t-1}^2$

- $-\theta_2\varepsilon_{t-2} \cdot (-\theta_1\varepsilon_{t-2}) = \theta_1\theta_2\varepsilon_{t-2}^2$

- Donc :

$$\gamma(1) = -\theta_1\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \theta_1\theta_2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2] = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2$$

Autocovariance d'ordre 2 du MA(2)

- **Calcul de $\gamma(2)$:**

$$\begin{aligned}\gamma(2) &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-2}] \\ &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4})]\end{aligned}$$

- Seul le produit $-\theta_2\varepsilon_{t-2} \cdot \varepsilon_{t-2}$ est non nul :

$$\gamma(2) = -\theta_2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2] = -\theta_2\sigma^2$$

- **Pour $|h| \geq 3$:** Il n'y a plus d'innovations communes entre Y_t et Y_{t-h}, donc :

$$\gamma(h) = 0 \quad \text{pour } |h| \geq 3$$

Résumé pour le MA(2)

- **Fonction d'autocovariance :**

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma^2 & \text{si } h=0 \\ (-\theta_1+\theta_1\theta_2)\sigma^2 & \text{si } |h|=1 \\ -\theta_2\sigma^2 & \text{si } |h|=2 \\ 0 & \text{si } |h|\geq 3 \end{cases}$$

- **Fonction d'autocorrélation :**

$$\rho(1) = \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \quad \rho(2) = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \quad \rho(h) = 0 \text{ si } |h|\geq 3$$

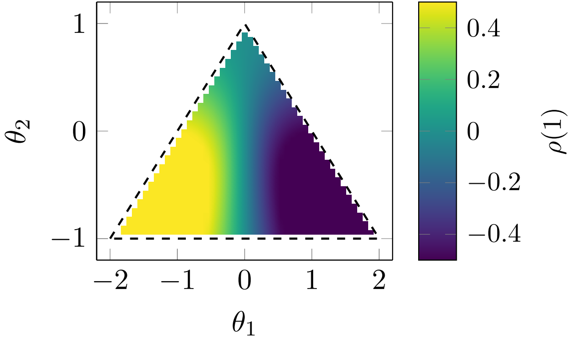
- $\Rightarrow$ La fonction d'autocovariance d'un MA(2) est nulle au-delà du rang 2.

- $\Rightarrow$ Le processus est stationnaire pour toute valeur de (θ_1, θ_2).

Autocorrélations du MA(2) : représentation graphique

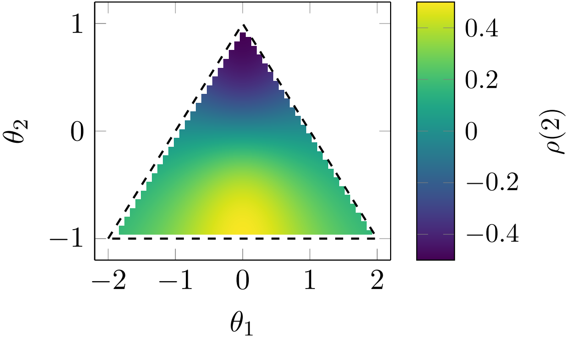
Autocorrélation d'ordre 1

$$\rho(1) = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$



Autocorrélation d'ordre 2

$$\rho(2) = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$



Triangle d'inversibilité : $\theta_2 > -1$, $\theta_1 + \theta_2 < 1$, $\theta_2 - \theta_1 < 1$.

Densité spectrale du MA(2)

- **Calcul** : Pour le MA(2), $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$, on a :

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega} \right|^2$$

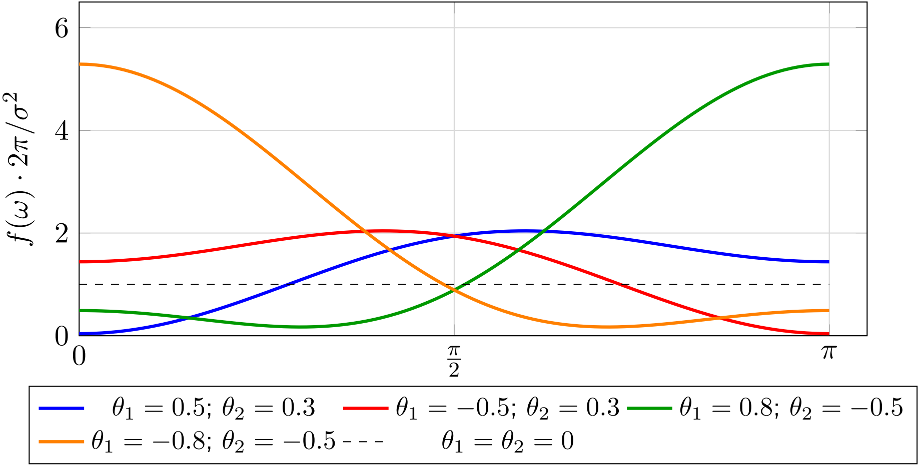
- En développant le module au carré :

$$\begin{aligned} \left| 1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega} \right|^2 &= 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1 \cos(\omega) + 2\theta_1\theta_2 \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \\ &= 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1(\theta_2 - 1) \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \end{aligned}$$

- **Densité spectrale du MA(2)** :

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1(\theta_2 - 1) \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \right]$$

Densité spectrale du MA(2) : représentation graphique



Le paramètre θ_2 contrôle la composante en $\cos(2\omega)$, introduisant des oscillations plus rapides dans le spectre.

Le modèle MA(q)

- **Définition :** Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2. On définit le processus MA(q) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ par :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- **Remarque sur la paramétrisation :** On a changé le signe des coefficients par rapport au MA(1) et MA(2). Ce choix de paramétrisation affecte l'expression de la fonction d'autocovariance mais pas les propriétés fondamentales du modèle.

- On pourrait ajouter une constante μ ou un autre terme déterministe ; cela n'affecterait que l'espérance.

Moments du MA(q)

- **Espérance :**
$$\mathbb{E}[Y_t] = 0$$
- **Variance :**
$$\begin{aligned}\mathbb{V}[Y_t] &= \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q})^2\right] \\ &= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \theta_1^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \cdots + \theta_q^2\mathbb{E}[\varepsilon_{t-q}^2]\end{aligned}$$
- Les termes croisés $\theta_i\theta_j\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j}$ pour $i \neq j$ sont nuls en espérance.
- $$\boxed{\mathbb{V}[Y_t] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2}$$

Fonction d'autocovariance du MA(q) (1/2)

- **Calcul de $\gamma(h)$:**

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-h-j}\right)\right]\end{aligned}$$

  avec la convention $\theta_0 = 1$.

- En développant :

$$\gamma(h) = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q} \theta_i \theta_j \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-h-j}]$$

- Le terme $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-h-j}]$ est nul sauf si $t-i = t-h-j$, c'est-à-dire si $j = i-h$.

Fonction d'autocovariance du MA(q) (2/2)

- En posant $j = i - h$ et en éliminant les termes nuls :

$$\boxed{\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h}}$$

avec la convention $\theta_0 = 1$ et $\theta_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i > q$.

- **Propriété fondamentale :**

$$\gamma(h) = 0 \quad \text{pour } |h| > q$$

La fonction d'autocovariance d'un MA(q) est nulle au-delà du rang q.

- $\Rightarrow$ Le processus MA(q) est **toujours stationnaire** pour toute valeur des paramètres $(\theta_1, \ldots, \theta_q)$.

Limitation du modèle MA

- Pour obtenir une persistance « longue » au sens où Y_t et Y_{t-h} sont corrélés pour de grandes valeurs de h, il faut rajouter de nombreux retards dans le modèle MA.
- À l'extrême, si on souhaite que Y_t soit corrélé avec tout son passé, il faut avoir un nombre **infini** de retards sur l'innovation !
- **Conclusion :** Le modèle MA n'est pas très **parcimonieux** pour modéliser des processus avec une persistance longue.
  $\Rightarrow$ On va introduire le modèle autorégressif (AR) qui permet de capturer une persistance longue avec peu de paramètres.

Le modèle MA(∞)

- **Définition :** Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2. On définit le processus MA(∞) $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ par :

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

avec $\theta_0 = 1$ et $(\theta_i)_{i \geq 0}$ une suite **absolument sommable** :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i| < \infty$$

- L'espérance de ce processus est $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$.

Variance du MA(∞)

- **Calcul de la variance :**

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 \varepsilon_{t-i}^2\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}^2] = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$$

- La variance est finie car si les θ_i sont absolument sommables, alors la somme des carrés est aussi finie :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 < \infty$$

- En effet : $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\theta_i|\right)^2 < \infty$.

Fonction d'autocovariance du MA(∞)

- **Calcul de $\gamma(h)$:**

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\theta_i\varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j\varepsilon_{t-h-j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\theta_i\theta_j\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-h-j}]\end{aligned}$$

- Le terme $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-h-j}]$ est non nul seulement si $i = h + j$, donc :

$$\boxed{\gamma(h) = \sigma^2\sum_{i=0}^{\infty}\theta_i\theta_{i+h}}$$

- **Propriété :** La fonction d'autocovariance (et donc d'autocorrélation) est **non nulle pour tout** h.

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Le modèle AR(1)

- **Définition** : Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2. Le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est **autorégressif d'ordre 1** s'il est défini par la récurrence stochastique :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- On suppose que ε_t est **indépendant du passé** de Y : c'est une innovation.
- On suppose $|\varphi| < 1$ (condition de stationnarité).
- Calculons les moments d'ordre 1 et 2 de ce processus **sous l'hypothèse de stationnarité**.

Espérance du AR(1)

- **Calcul de l'espérance :**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}[\varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t] \\ &= \varphi \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] \\ &= \varphi \mathbb{E}[Y_{t-1}]\end{aligned}$$

- Sous l'hypothèse de stationnarité, $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \mu$ pour tout t.

- Donc :

$$\mu = \varphi \mu$$

- Pour $\varphi \neq 1$, la seule solution est :

$$\boxed{\mathbb{E}[Y_t] = 0}$$

Variance du AR(1)

- **Calcul de la variance :**

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t]$$

- Comme ε_t est indépendant du passé de Y_t, on peut « casser » la variance :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi Y_{t-1}] + \mathbb{V}[\varepsilon_t] = \varphi^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + \sigma^2$$

- Sous l'hypothèse de stationnarité, $\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[Y_{t-1}] = \gamma(0)$:

$$\gamma(0) = \varphi^2 \gamma(0) + \sigma^2$$

- D'où :

$$\boxed{\gamma(0) = \mathbb{V}[Y_t] = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi^2}}$$

Remarques sur la variance du AR(1)

- $$\mathbb{V}[Y_t] = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$
- La volatilité de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est d'autant plus importante que :
- La variance de l'innovation σ^2 est grande
- Le paramètre autorégressif φ est proche de 1 ou -1
- **Attention :**
  - La variance n'est pas définie pour $|\varphi| = 1$
  - Elle devient même **négative** pour $|\varphi| > 1$ (ce qui est absurde)

$\Rightarrow$ Cela justifie la condition $|\varphi| < 1$.

Fonction d'autocovariance du AR(1) (1/2)

- **Calcul de $\gamma(h)$** : Partons de la définition :

$$Y_t Y_{t-h} = \varphi Y_{t-1} Y_{t-h} + \varepsilon_t Y_{t-h}$$

- En prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] = \varphi \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-h}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-h}]$$

- Pour $h \geq 1$, on a $\mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-h}] = 0$ car ε_t est indépendant du passé de Y.

- Par définition de la fonction d'autocovariance obéit à la récurrence d'ordre 1 suivante :

$$\gamma(h) = \varphi \gamma(h-1)$$

Fonction d'autocovariance du AR(1) (2/2)

- La fonction d'autocovariance vérifie la récurrence :

$$\gamma(h) = \varphi\gamma(h-1)$$

- avec $\gamma(0) = \dfrac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$. Cette équation récurrente est stable car $|\varphi| < 1$.
- En résolvant cette récurrence :

$$\boxed{\gamma(h) = \varphi^h \cdot \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2} = \varphi^h\gamma(0)}$$

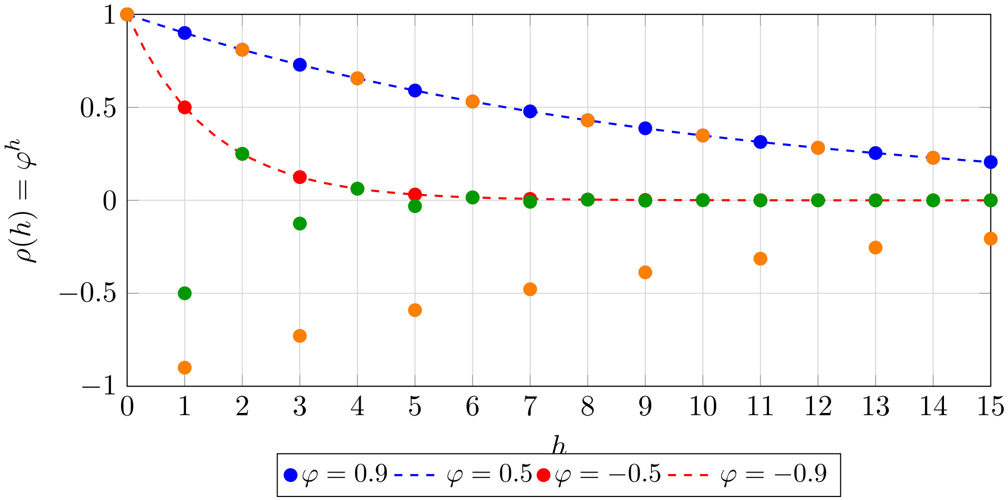
- La fonction d'autocorrélation est donc :

$$\boxed{\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \varphi^h}$$

Interprétation du paramètre autorégressif

- $$\rho(h) = \varphi^h$$
- **Remarques :**
  - La fonction d'autocorrélation est **non nulle à tout ordre**
  - Elle est **décroissante** (en valeur absolue) vers 0
  - La vitesse de décroissance dépend de $|\varphi|$
- **Interprétation :** Le paramètre autorégressif φ s'interprète comme un **paramètre de persistance** :
  - Plus $|\varphi|$ est proche de 1, plus lentement $\rho(h)$ converge vers 0
  - Plus $|\varphi|$ est proche de 0, plus rapidement la mémoire du processus s'estompe

Fonction d'autocorrélation du AR(1) : représentation graphique



$\varphi > 0$: décroissance **monotone**. $\varphi < 0$: décroissance **oscillatoire**.

Densité spectrale du AR(1)

- **Calcul** : Pour le AR(1), $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$, on a :

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - \varphi e^{-i\omega}|^2}$$

- En développant le module au carré :

$$\left|1 - \varphi e^{-i\omega}\right|^2 = (1 - \varphi e^{-i\omega})(1 - \varphi e^{i\omega}) = 1 + \varphi^2 - 2\varphi\cos(\omega)$$

- **Densité spectrale du AR(1) :**

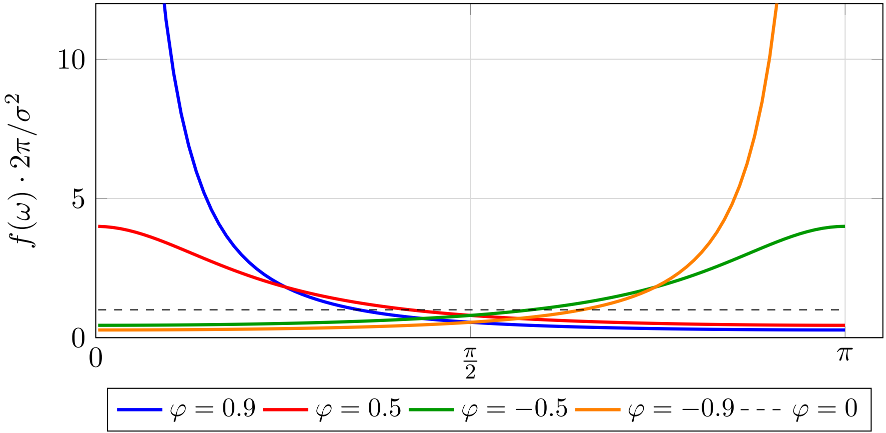
$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \varphi^2 - 2\varphi\cos(\omega)}, \quad \omega \in [0, \pi]$$

- **Remarque** : Comparer avec la densité spectrale du MA(1) :

$$f_{\mathsf{MA}(1)}(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1 + \theta^2 - 2\theta\cos(\omega)\right)$$

  Le AR(1) et le MA(1) ont des spectres **inverses** l'un de l'autre.

Densité spectrale du AR(1) : représentation graphique



$\varphi > 0$: énergie aux **basses fréquences**. $\varphi < 0$: énergie aux **hautes fréquences**.

AR(1) avec constante

- **Exercice :** Calculer les moments d'ordre 1 et 2 du processus :

$$Y_t = c + \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$ et $|\varphi| < 1$, sous l'hypothèse de stationnarité.

- **Espérance :**

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi \mathbb{E}[Y_{t-1}] \quad \Rightarrow \quad \mu = c + \varphi\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{c}{1-\varphi}}$$

- **Variance et autocovariance :** inchangées (la constante n'affecte pas les moments centrés d'ordre 2).

Intuition sur la persistance

- **Question :** Plus φ se rapproche de 1, plus Y_t devient dépendant de son passé. **Que se passe-t-il dans le cas limite $\varphi = 1$?**
- Pour répondre à cette question, nous allons recalculer les moments **sans recourir à l'hypothèse de stationnarité**.
- Nous allons voir que :
- Si $|\varphi| < 1$, le processus converge vers une distribution stationnaire
- Si $\varphi = 1$, le processus n'admet pas de distribution stationnaire

Condition initiale et solution explicite

- Supposons qu'il existe une **condition initiale** Y_0 : une variable aléatoire d'espérance μ_0 et de variance σ_0^2.
- On peut exprimer Y_t en fonction de Y_0 et des innovations entre 0 et t.
- En effet, par itération de la récurrence $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \varphi(\varphi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varphi^2 Y_{t-2} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \varphi^3 Y_{t-3} + \varphi^2\varepsilon_{t-2} + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Solution explicite de l'AR(1)

- En itérant jusqu'à la condition initiale Y_0, on obtient :

$$\boxed{Y_t = \varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}}$$

- On peut vérifier que cette expression est correcte en la substituant dans l'expression récursive du processus AR(1).
- Il s'agit de la **solution de l'équation récurrente stochastique**.
- On peut utiliser cette expression pour calculer les moments de l'AR(1) sans supposer la stationnarité.

Espérance sans hypothèse de stationnarité

- **Calcul de l'espérance :**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}\left[\varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right] \\
&= \varphi^t \mathbb{E}[Y_0] + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}]}_{=0} \\
&= \varphi^t \mu_0
\end{aligned}$$

- **Observation :** L'espérance **dépend du temps** t, sauf si l'espérance de la condition initiale est nulle ($\mu_0 = 0$).

Variance sans hypothèse de stationnarité

- **Calcul de la variance :**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[Y_t] &= \mathbb{V}\left[\varphi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right] \\
&= \varphi^{2t}\mathbb{V}[Y_0] + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^{2i}\mathbb{V}[\varepsilon_{t-i}] \\
&= \varphi^{2t}\sigma_0^2 + \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^{2i} \\
&= \varphi^{2t}\sigma_0^2 + \sigma^2 \cdot \frac{1-\varphi^{2t}}{1-\varphi^2}
\end{aligned}
$$

- **Observation :** La variance **dépend du temps** t... sauf si $\sigma_0^2 = \dfrac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$.

Condition de stationnarité

- **Proposition :** Si $|\varphi| < 1$, le processus stochastique $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ et condition initiale Y_0 est **stationnaire au second ordre** si et seulement si :

$$\mu_0 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi^2}$$

- Pour que le processus soit stationnaire au second ordre, il faut et il suffit que les moments de la condition initiale soient **identiques aux moments stationnaires** que nous avions calculés précédemment.

Interprétation : dynamique d'une distribution (1/2)

- Il faut bien comprendre la nature de l'équation :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Une récurrence stochastique définit l'évolution dans le temps d'une **distribution**.

- Pour mieux comprendre, supposons que ε_t soit un bruit blanc **gaussien** et que la condition initiale soit normalement distribuée :

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad Y_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

- Puisque le modèle est linéaire, Y_t sera **normalement distribué** pour tout t (une combinaison linéaire de variables normales est normale).

Interprétation : dynamique d'une distribution (2/2)

- À chaque période, la distribution de Y_t évolue :

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim \mathcal{N}(\varphi\mu_0, \varphi^2\sigma_0^2 + \sigma^2) \\ Y_2 &\sim \mathcal{N}(\varphi^2\mu_0, \varphi^4\sigma_0^2 + (1+\varphi^2)\sigma^2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- En général, à chaque période :

$$\mu_t = \varphi\mu_{t-1}, \quad \sigma_t^2 = \varphi^2\sigma_{t-1}^2 + \sigma^2$$

- **Observation :** L'espérance μ_t et la variance σ_t^2 changent à chaque période !

Convergence vers la distribution stationnaire

- Puisque $|\varphi| < 1$, on peut itérer indéfiniment. **Asymptotiquement**, Y_t est normalement distribué :
$$Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu_\infty, \sigma^2_\infty)$$
avec :
$$\mu_\infty = \lim_{t\to\infty} \varphi^t \mu_0 = 0, \quad \sigma^2_\infty = \lim_{t\to\infty} \sigma^2_t = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$
- Y_t tend vers une distribution bien définie. Les moments asymptotiques μ_∞ et σ^2_∞ :
- Ne dépendent **pas** de la distribution de la condition initiale
- Correspondent précisément aux moments calculés sous l'hypothèse de stationnarité

Distribution stationnaire comme point fixe

- La récurrence stochastique $Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ décrit la **dynamique d'une distribution**.

- Pour toute condition initiale Y_0, la dynamique converge vers une distribution normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$.

- **Point fixe :** La loi $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma^2}{1-\varphi^2}\right)$ est l'**attracteur** de la récurrence stochastique. C'est un **point fixe** dans l'espace des distributions : si Y_0 a cette distribution, alors la distribution est invariante pour tout t.

Stationnarité asymptotique

- **Définition :** Un processus stochastique est **asymptotiquement stationnaire au second ordre** s'il existe une distribution limite (quand $t \to \infty$) dont les moments d'ordre 1 et 2 sont finis et constants.

- **Astuce pratique :** Utiliser la distribution asymptotique pour définir la condition initiale !

- Pour que le modèle AR(1) soit asymptotiquement stationnaire au second ordre, il faut et il suffit que $|\varphi| < 1$.

- En effet, la dynamique de la distribution est caractérisée par le système :

$$\mu_t = \varphi \mu_{t-1}, \quad \sigma_t^2 = \varphi^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma^2$$

  Ce système est **globalement stable** si et seulement si $|\varphi| < 1$.

Condition de stabilité et polynôme retard

- On dit que $|\varphi| < 1$ est une **condition de stabilité** de l'AR(1).

- **Réécriture avec le polynôme retard :**

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \varphi L) Y_t = \varepsilon_t$$

  où $\Phi(L) = 1 - \varphi L$.

- La condition de stabilité peut s'exprimer comme une restriction sur la **racine du polynôme retard** :

$$\Phi(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \varphi z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{\varphi}$$

- Le processus est stable si la racine du polynôme retard est **supérieure à 1 en module** :

$$\left|\frac{1}{\varphi}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\varphi| < 1$$

Représentation MA(∞) de l'AR(1)

- Sous la condition $|\varphi| < 1$, on peut inverser le polynôme retard (voir chapitre précédent) et obtenir la représentation MA(∞) :

$$Y_t = \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t = (1-\varphi L)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

- On retrouve cette expression en itérant vers le passé :

$$Y_t = \varphi^s Y_{t-s} + \sum_{i=0}^{s-1} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

- Quand $s \to \infty$, le terme $\varphi^s Y_{t-s} \to 0$ (car $|\varphi| < 1$) et :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}$$

- On obtient directement les moments de la distribution stationnaire.

Propriété du modèle AR(1) si $\varphi = 1$

- Si $\varphi = 1$ (ou -1), nous savons que nous ne pouvons **pas inverser** le polynôme retard.
- En pratique, cela signifie : il n'est pas possible de représenter le processus sous la forme d'un MA(∞), et le processus n'admet **pas de distribution stationnaire**.
- Supposons que la condition initiale Y_0 soit une variable aléatoire d'espérance μ_0 et de variance σ_0^2.
- On montre facilement par récurrence arrière que :

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

Moments de la marche aléatoire

- Pour $Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$, calculons les moments :
- **Espérance :**

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mu_0 + \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\varepsilon_i] = \mu_0$$

- **Variance :**

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[Y_0] + \sum_{i=1}^{t} \mathbb{V}[\varepsilon_i] = \sigma_0^2 + t\sigma^2$$

- **Observation :** L'espérance est constante, mais la variance **croît linéairement** avec le temps !
  $\Rightarrow$ Le processus stochastique est donc **non stationnaire**.

Tendance stochastique

- Contrairement au cas $|\varphi| < 1$, la variance ne cesse jamais de croître.
- On parle alors de **tendance stochastique**.
- Il n'est donc pas possible de définir une distribution stationnaire, puisque la variance augmente indéfiniment.
- **Définition : Marche aléatoire :** Un processus de la forme :

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

est appelé une **marche aléatoire** (random walk).

Processus intégré d'ordre 1

- Notons que si la variance de Y_t n'est pas définie (elle diverge), celle de ΔY_t est bien définie :
$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$$
- Le processus différencié est un bruit blanc, *a fortiori* stationnaire au second ordre.

- **Définition : Processus intégré :** Un processus non stationnaire qui peut être rendu stationnaire en le **différenciant**, c'est-à-dire en appliquant l'opérateur différence première, est dit **intégré d'ordre 1** (on note $I(1)$).

- La marche aléatoire est le cas le plus simple de processus $I(1)$.

Le cas $|\varphi| > 1$

- **Problème :** Si $|\varphi| > 1$, la dynamique est **explosive** : la variance diverge exponentiellement.
- De plus, la représentation n'est pas **causale**. L'inversion du polynôme retard (qui est possible avec $|\varphi| > 1$ mais dans l'autre sens) nous dit que Y_t n'est plus fonction des ε passés mais des ε **futurs**.
- Voir la fin du chapitre précédent sur l'inversion des polynômes retard.
- **Remarque :** Un modèle MA est toujours causal (par construction, Y_t ne dépend que des ε passés et présents).

Construction de l'AR(2) par composition

- On peut considérer un modèle avec **deux retards** sur l'endogène. On peut créer un processus AR(2) en **composant deux processus AR(1)**.

- Soit le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par :

$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

  avec $|\lambda_1| < 1$ et $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$.

- On construit le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ comme :

$$Y_t = \lambda_2 Y_{t-1} + X_t$$

  avec $|\lambda_2| < 1$.

- Le processus Y_t dépend donc de Y_{t-1} et, indirectement via X_t, de Y_{t-2}.
  Remarque : (X_t) n'est pas l'innovation de (Y_t).

Dérivation de l'AR(2) par composition

- En utilisant les polynômes retard :

$$(1-\lambda_1 L)X_t = \varepsilon_t \quad (*), \qquad (1-\lambda_2 L)Y_t = X_t \quad (**)$$

- En substituant $(*)$ dans $(**)$:

$$\begin{aligned} (1-\lambda_2 L)Y_t &= (1-\lambda_1 L)^{-1}\varepsilon_t \\ \Leftrightarrow \quad (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)Y_t &= \varepsilon_t \\ \Leftrightarrow \quad (1-(\lambda_1+\lambda_2)L+\lambda_1\lambda_2 L^2)Y_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

- D'où :

$$Y_t = (\lambda_1+\lambda_2)Y_{t-1} - \lambda_1\lambda_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- avec $\varphi_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\varphi_2 = -\lambda_1\lambda_2$.

Définition générale de l'AR(2)

- **Définition :** $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus **AR(2)** si :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

  avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$.

- Ce processus est **stable** (asymptotiquement stationnaire au second ordre et causal) si les racines du polynôme retard :

$$\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2$$

  sont **supérieures à 1 en module**.

- **Remarque :** Les racines du polynôme retard peuvent être **complexes conjuguées**, même si le processus stochastique est à valeurs réelles $\Rightarrow$ composante cyclique.

Polynôme retard vs polynôme caractéristique

- Jusqu'ici nous avons discuté la stabilité en fonction des racines du **polynôme retard**. On peut aussi utiliser le **polynôme caractéristique** (habituel en systèmes dynamiques).
- Pour le modèle AR(2), le polynôme caractéristique est :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \varphi_1\lambda - \varphi_2$$

- Si zéro n'est pas une racine (ce qui arriverait si $\varphi_2 = 0$, mais alors ce ne serait pas un AR(2)), il existe une relation **inverse** entre les racines :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 \left(1 - \varphi_1 \frac{1}{\lambda} - \varphi_2 \frac{1}{\lambda^2}\right) = \lambda^2 \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

- Ainsi λ^* est racine de $\chi(\lambda)$ si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda^*}$ est racine de $\Phi(z)$.

Condition de stabilité équivalente

- **Condition de stabilité :** La condition de stationnarité asymptotique au second ordre est équivalente à :
  - Les racines du **polynôme retard** $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2$ sont > 1 en module **ou de façon équivalente :**
  - Les racines du **polynôme caractéristique** $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \varphi_1 \lambda - \varphi_2$ sont < 1 en module (à l'intérieur du cercle unité)

Conditions de stabilité de l'AR(2) (1/3)

- **Question :** Quelles sont les conditions sur φ_1 et φ_2 pour que le modèle soit stable ?
- Il faut que les racines du polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \varphi_1\lambda - \varphi_2$ soient < 1 en module.
- Le discriminant est $\Delta = \varphi_1^2 + 4\varphi_2$.
- **Cas complexe :** Si $\Delta < 0$ (c'est-à-dire $\varphi_2 < -\frac{\varphi_1^2}{4}$), les racines sont complexes conjuguées :
$$\lambda^* = \frac{\varphi_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$
- Le module est $|\lambda^*| = \sqrt{\frac{\varphi_1^2}{4} + \frac{-\Delta}{4}} = \sqrt{-\varphi_2}$.
- Pour la stabilité : $|\lambda^*| < 1 \Leftrightarrow \boxed{\varphi_2 > -1}$.

Conditions de stabilité de l'AR(2) (2/3)

- **Cas réel** : Si $\Delta \geq 0$ (c'est-à-dire $\varphi_2 \geq -\frac{\varphi_1^2}{4}$), les racines sont réelles :

$$\lambda_1 = \frac{\varphi_1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\varphi_1 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

- **Condition sur la plus grande racine λ_1 :** $\lambda_1 < 1 \Leftrightarrow \varphi_1 + \sqrt{\Delta} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < 2 - \varphi_1$

- Si $\varphi_1 \geq 2$, cette condition n'est jamais satisfaite $\Rightarrow$ non stationnaire.

- Si $\varphi_1 < 2$, en élevant au carré : $\Delta < (2 - \varphi_1)^2$

$$\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 4 - 4\varphi_1 + \varphi_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\varphi_2 < 1 - \varphi_1}$$

Conditions de stabilité de l'AR(2) (3/3)

- **Condition sur la plus petite racine λ_2 :** $\lambda_2 > -1 \Leftrightarrow \varphi_1 - \sqrt{\Delta} > -2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < \varphi_1 + 2$

- Si $\varphi_1 \leq -2$, cette condition n'est jamais satisfaite $\Rightarrow$ non stationnaire.

- Si $\varphi_1 > -2$, en élevant au carré : $\Delta < (\varphi_1 + 2)^2$

$$\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < \varphi_1^2 + 4\varphi_1 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\varphi_2 < 1 + \varphi_1}$$

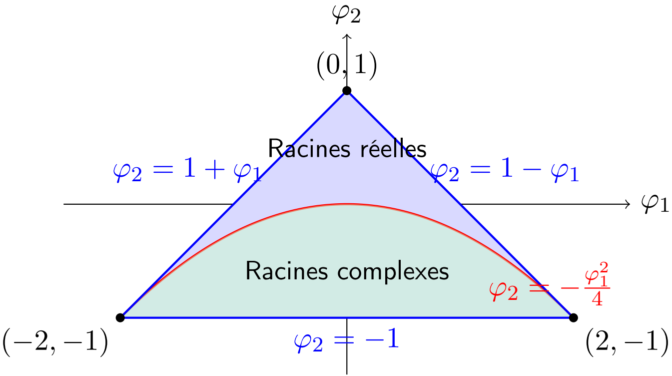
- **Résumé : Conditions de stabilité de l'AR(2) :**

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_2 > -1 \\ \varphi_2 < 1 - \varphi_1 \\ \varphi_2 < 1 + \varphi_1 \end{cases}}$$

Triangle de stabilité de l'AR(2)

- Les trois conditions définissent un **triangle** :
- $\varphi_2 > -1$: au-dessus de la droite horizontale $\varphi_2 = -1$
- $\varphi_2 < 1 - \varphi_1$: en dessous de la droite passant par $(0, 1)$ et $(1, 0)$
- $\varphi_2 < 1 + \varphi_1$: en dessous de la droite passant par $(0, 1)$ et $(-1, 0)$
- Les sommets du triangle sont : $(-2, -1)$, $(2, -1)$ et $(0, 1)$.
- À l'intérieur de ce triangle : processus **stable**.
- À l'extérieur : processus **instable** (explosif ou avec racine unitaire).

Triangle de stabilité (représentation graphique)



- $\Delta > 0$ (au-dessus de la parabole) : deux racines réelles distinctes
- $\Delta < 0$ (en dessous de la parabole) : deux racines complexes conjuguées
- $\Delta = 0$ (sur la parabole) : racine réelle double

Moments de l'AR(2) : Espérance

- Calculons les moments du processus AR(2) :

$$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$, en supposant que φ_1 et φ_2 satisfont les conditions de stationnarité.

- **Espérance :**

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2}]$$

- Sous stationnarité, $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \mathbb{E}[Y_{t-2}] = \mu$, donc :

$$\mu = c + \varphi_1 \mu + \varphi_2 \mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}}$$

Moments de l'AR(2) : Variance (difficulté)

- **Calcul de la variance :** On ne peut pas suivre la même approche que pour l'AR(1). Par définition :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t]$$

- Comme c est déterministe et ε_t est une innovation :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2}] + \sigma^2$$

- **Problème :** Y_{t-1} et Y_{t-2} sont très probablement **corrélés**. On ne peut pas simplement « casser » la variance sans connaître la covariance entre Y_{t-1} et Y_{t-2}.
$\Rightarrow$ Il n'est pas possible de calculer $\gamma(0)$ indépendamment de $\gamma(1)$.

Fonction d'autocovariance de l'AR(2) : processus centré

- Notons $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ le processus centré. On peut montrer que :

$$\tilde{Y}_t = \varphi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t$$

- C'est le même processus mais sans constante.

- **Démonstration :**

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ Y_t &= \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ Y_t - \mu &= \varphi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \varphi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

- La fonction d'autocovariance de (Y_t) est identique à celle du processus centré $(\tilde{Y}_t)$.

Équations de Yule-Walker (1/2)

- Calculons $\gamma(h) = \mathbb{E}[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-h}]$.

- **Pour $h = 0$:**

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2] = \mathbb{E}[(\varphi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t)\tilde{Y}_t]$$
$$\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_t]}_{\text{à calculer}}$$

- Or $\tilde{Y}_t = \varphi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t$, donc :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_t] = \varphi_1 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-1}]}_{=0} + \varphi_2 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-2}]}_{=0} + \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$$

- D'où : $\boxed{\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \sigma^2}$

Équations de Yule-Walker (2/2)

- **Pour $h = 1$:**

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t\tilde{Y}_{t-1} &= \varphi_1\tilde{Y}_{t-1}^2 + \varphi_2\tilde{Y}_{t-2}\tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t\tilde{Y}_{t-1} \\
\gamma(1) &= \varphi_1\gamma(0) + \varphi_2\gamma(1) + 0 \\
\Rightarrow \quad & \boxed{\gamma(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma(0)}
\end{aligned}$$

- **Pour $h = 2$:**

$$\gamma(2) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(0)$$

- **Pour $h \geq 2$:** La récurrence générale est :

$$\boxed{\gamma(h) = \varphi_1\gamma(h-1) + \varphi_2\gamma(h-2)}$$

Résolution du système de Yule-Walker

- Nous avons un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \sigma^2 \\ \gamma(1) = \varphi_1\gamma(0) + \varphi_2\gamma(1) \\ \gamma(2) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(0) \end{cases}$$

- De la deuxième équation : $\gamma(1) = \dfrac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma(0)$
- En substituant dans la troisième :
$\gamma(2) = \dfrac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}\gamma(0) + \varphi_2\gamma(0) = \dfrac{\varphi_1^2 + \varphi_2 - \varphi_2^2}{1-\varphi_2}\gamma(0)$
- En substituant dans la première et après simplification :

$$\boxed{\gamma(0) = \frac{(1-\varphi_2)\sigma^2}{(1+\varphi_2)[(1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2]}}$$

Vérification et formules complètes

- On vérifie facilement que pour $\varphi_2 = 0$, cette formule redonne le résultat du modèle AR(1) :

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1^2}$$

- **Formules complètes :**

$$\gamma(0) = \frac{(1 - \varphi_2)\sigma^2}{(1 + \varphi_2)[(1 - \varphi_2)^2 - \varphi_1^2]}$$

$$\gamma(1) = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}\gamma(0) = \frac{\varphi_1 \sigma^2}{(1 + \varphi_2)[(1 - \varphi_2)^2 - \varphi_1^2]}$$

- Ensuite, la fonction d'autocovariance est définie **récursivement** :

$$\gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \varphi_2 \gamma(h-2) \quad \text{pour } h \geq 2$$

Propriétés de l'autocovariance de l'AR(2)

- **Remarque :** Comme pour le modèle AR(1), la fonction d'autocovariance est **non nulle** à tout ordre et converge vers 0 (si φ_1 et φ_2 sont tels que le modèle est stable).

- La fonction d'autocorrélation est :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

- Elle vérifie aussi la récurrence :

$$\rho(h) = \varphi_1 \rho(h-1) + \varphi_2 \rho(h-2) \quad \text{pour } h \geq 1$$

avec $\rho(0) = 1$ et $\rho(1) = \dfrac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}$.

Représentation MA(∞) de l'AR(2)

- Si le processus AR(2) est asymptotiquement stationnaire, alors il admet une représentation MA(∞) :

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} = \mu + \psi(L)\varepsilon_t$$

- Pour identifier $\psi(L)$ et μ, il « suffit » d'inverser le polynôme retard. L'AR(2) s'écrit :

$$\Phi(L)Y_t = c + \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad Y_t = \Phi(L)^{-1}c + \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t$$

- Appliquer un opérateur retard à une constante ne change rien, donc $\Phi(L)^{-1}c = \Phi(1)^{-1}c$.

- Par identification :

$$\mu = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

(l'espérance de Y_t, comme attendu).

Calcul des coefficients ψ_i (1/2)

- On doit avoir $\psi(L) = \Phi(L)^{-1}$, c'est-à-dire $\Phi(L)\psi(L) = 1$:

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^i = 1$$

- En développant et regroupant par puissances de L :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^i - \varphi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^{i+1} - \varphi_2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^{i+2} = 1$$

- Soit :

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\psi_i - \varphi_1 \psi_{i-1} - \varphi_2 \psi_{i-2}) L^i = 1$$

avec la convention $\psi_{-1} = \psi_{-2} = 0$.

Calcul des coefficients ψ_i (2/2)

- Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 - \varphi_1\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = \varphi_1 \\ \psi_2 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = \varphi_1^2 + \varphi_2 \\ \vdots \end{cases}$$

- **Récurrence générale :**

$$\boxed{\psi_i = \varphi_1\psi_{i-1} + \varphi_2\psi_{i-2} \quad \text{pour } i \geq 2}$$

avec $\psi_0 = 1$ et $\psi_1 = \varphi_1$.

- On peut résoudre ce système récursivement : la deuxième équation donne ψ_1, la troisième donne ψ_2, etc.

Résumé AR(2)

- L'AR(2) se définit par $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
- **Conditions de stabilité** (triangle) :

$$\varphi_2 > -1, \quad \varphi_2 < 1 - \varphi_1, \quad \varphi_2 < 1 + \varphi_1$$

- L'espérance (avec constante c) est $\mu = \dfrac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$
- La variance et les autocovariances se calculent via les **équations de Yule-Walker**
- La fonction d'autocovariance vérifie $\gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \varphi_2 \gamma(h-2)$
- Sous stationnarité, l'AR(2) admet une représentation **MA(∞)**
- Les racines complexes du polynôme caractéristique engendrent des **cycles**

Définition de l'AR(p)

- **Définition** : Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$. Le processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus **autorégressif d'ordre** p si :

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

  avec c et $(\varphi_i)_{i=1}^{p}$ des paramètres réels.

- Le processus est **asymptotiquement stationnaire au second ordre** si :

- Les racines du polynôme retard $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \cdots - \varphi_p z^p$ sont > 1 en module

- Ou de façon équivalente : les racines du polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \varphi_p$ sont < 1 en module

Remarque sur les conditions de stabilité

- **Important :** Il n'est plus possible d'obtenir de façon générale des restrictions **explicites** sur les paramètres autorégressifs pour assurer la stabilité du processus AR(p).
  Il faut vérifier **au cas par cas** en calculant les racines du polynôme retard (ou du polynôme caractéristique).
- Pour $p = 1$: condition simple $|\varphi_1| < 1$.
- Pour $p = 2$: triangle de stationnarité (conditions explicites sur φ_1 et φ_2).
- Pour $p \geq 3$: pas de formule générale simple.

Espérance de l'AR(p)

- Sous l'hypothèse de stationnarité au second ordre, calculons l'espérance.
- $$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$
- En prenant l'espérance :
$$\mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2}] + \cdots + \varphi_p \mathbb{E}[Y_{t-p}]$$
- Sous stationnarité, $\mathbb{E}[Y_t] = \mu$ pour tout t, donc :
$$\mu = c + \varphi_1 \mu + \cdots + \varphi_p \mu = c + \mu \sum_{i=1}^{p} \varphi_i$$
- D'où :
$$\boxed{\mu = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_p}}$$

Autocovariance de l'AR(p) : processus centré

- Centrons le processus en définissant $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$. On montre que :

$$\tilde{Y}_t = \varphi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \varphi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \cdots + \varphi_p \tilde{Y}_{t-p} + \varepsilon_t$$

- L'autocovariance d'ordre h est $\gamma(h) = \mathbb{E}[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-h}]$.

- Pour tout $h \geq 0$:

$$\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-h} = \varphi_1 \tilde{Y}_{t-1} \tilde{Y}_{t-h} + \cdots + \varphi_p \tilde{Y}_{t-p} \tilde{Y}_{t-h} + \varepsilon_t \tilde{Y}_{t-h}$$

- En prenant l'espérance :

$$\gamma(h) = \varphi_1 \gamma(h-1) + \varphi_2 \gamma(h-2) + \cdots + \varphi_p \gamma(h-p) + \mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-h}]$$

- avec $\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-h}] = \sigma^2$ si $h = 0$, et 0 sinon (innovation).

Équations de Yule-Walker pour l'AR(p)

- On obtient la fonction d'autocovariance en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \cdots + \varphi_p\gamma(p) + \sigma^2 \\ \gamma(1) = \varphi_1\gamma(0) + \varphi_2\gamma(1) + \cdots + \varphi_p\gamma(p-1) \\ \gamma(2) = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(0) + \cdots + \varphi_p\gamma(p-2) \\ \vdots \\ \gamma(p) = \varphi_1\gamma(p-1) + \varphi_2\gamma(p-2) + \cdots + \varphi_p\gamma(0) \end{cases}$$

- Les termes suivants sont obtenus par **récurrence** :

$$\gamma(h) = \varphi_1\gamma(h-1) + \varphi_2\gamma(h-2) + \cdots + \varphi_p\gamma(h-p) \quad \text{pour } h > p$$

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Du MA vers l'AR : inversibilité

- Nous avons montré qu'on peut réécrire un processus AR comme un MA(∞) si les racines du polynôme retard sont > 1 en module.
- **Question :** Est-il possible de faire le chemin inverse ? C'est-à-dire d'écrire un processus MA sous la forme d'un AR(∞) ?
- La réponse est **oui**, sous certaines conditions.

Exemple : inversibilité du MA(1) (1/2)

- Supposons que $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ soit un MA(1) :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$.

- En $t-1$: $Y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}$, donc $\varepsilon_{t-1} = Y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}$.

- En substituant dans l'équation du MA(1) :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta Y_{t-1} - \theta^2\varepsilon_{t-2}$$

- En $t-2$: $\varepsilon_{t-2} = Y_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3}$. En substituant :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} + \theta^3\varepsilon_{t-3}$$

Exemple : inversibilité du MA(1) (2/2)

- Si $|\theta| < 1$, on peut continuer ainsi indéfiniment :

$$Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- C'est un processus **AR(∞)** !

- Implicitement, nous avons inversé le polynôme retard $\Theta(L) = 1 + \theta L$.

- **Condition d'inversibilité :** Pour que cela soit possible (plus généralement pour un MA(q)), il faut que toutes les racines du polynôme $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ soient > 1 en module.

Définition de l'inversibilité

- **Définition :** Un processus MA(q) est dit **inversible** s'il est possible de le réécrire sous la forme d'un AR(∞).

- **Condition d'inversibilité :** Le processus MA(q) défini par :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \Theta(L)\varepsilon_t$$

  est inversible si et seulement si les racines du polynôme $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ sont > 1 en module.

- **Remarque :** Un modèle MA est **toujours causal** (par construction). Un modèle AR est **toujours inversible** (par construction).

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Motivation : somme de deux AR(1)

- Soient $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ et $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ deux processus AR(1) :

$$Y_t = \varphi_Y Y_{t-1} + \varepsilon_{Y,t}, \quad X_t = \varphi_X X_{t-1} + \varepsilon_{X,t}$$

  avec $|\varphi_Y| < 1$, $|\varphi_X| < 1$, $(\varepsilon_{Y,t})$ et $(\varepsilon_{X,t})$ des bruits blancs indépendants.

- Définissons $Z_t = X_t + Y_t$. Est-ce que (Z_t) est un processus AR ?

- **Réponse : Non !**

- En utilisant les polynômes retard et après calculs (voir notes), on montre que :

$$Z_t - (\varphi_X + \varphi_Y)Z_{t-1} + \varphi_X \varphi_Y Z_{t-2} = S_t$$

  où S_t est un processus MA(1).

La somme de deux AR(1) est un ARMA(2,1)

- Après calculs, on montre que $S_t = \varepsilon_{X,t} + \varepsilon_{Y,t} - \varphi_X \varepsilon_{Y,t-1} - \varphi_Y \varepsilon_{X,t-1}$ a la structure d'un MA(1). En effet :

$$\gamma_S(0) = (1 + \varphi_Y^2)\sigma_X^2 + (1 + \varphi_X^2)\sigma_Y^2$$
$$\gamma_S(1) = -\varphi_X \sigma_Y^2 - \varphi_Y \sigma_X^2$$
$$\gamma_S(h) = 0 \quad \text{pour } |h| > 1$$

  C'est bien la structure d'un MA(1) : $S_t = \eta_t - \theta \eta_{t-1}$.

- **Conclusion :** La somme des deux AR(1) s'écrit :

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \eta_t - \theta \eta_{t-1}$$

- C'est un processus **ARMA(2,1)** : deux retards sur la partie AR, un retard sur la partie MA.

Paramètres de la partie MA(1) (1/2)

- Pour un MA(1) $S_t = \eta_t - \theta\eta_{t-1}$ avec $\eta_t \sim BB(0, \sigma_\eta^2)$:

$$\gamma_S(0) = (1+\theta^2)\sigma_\eta^2, \qquad \gamma_S(1) = -\theta\sigma_\eta^2$$

- Posons $A = (1+\varphi_Y^2)\sigma_X^2 + (1+\varphi_X^2)\sigma_Y^2$ et $B = \varphi_X\sigma_Y^2 + \varphi_Y\sigma_X^2$. En identifiant :

$$(1+\theta^2)\sigma_\eta^2 = A, \qquad \theta\sigma_\eta^2 = B$$

- En divisant et réarrangeant : $B\theta^2 - A\theta + B = 0$, soit :

$$\theta = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2B}$$

Les deux racines sont θ et $1/\theta$. On choisit $|\theta| < 1$ (inversibilité). Puis $\sigma_\eta^2 = B/\theta$.

Unicité de la solution inversible

- L'équation $B\theta^2 - A\theta + B = 0$ a deux racines de produit $B/B = 1$ (Vieta).
- Il suffit de montrer que le **discriminant** $\Delta = A^2 - 4B^2$ est strictement positif (racines réelles distinctes), car alors une racine vérifie $|\theta| < 1$ et l'autre $|1/\theta| > 1$.
- En développant :

  $$A^2 - 4B^2 = (1-\varphi_Y^2)^2\sigma_X^4 + 2\big[(1-\varphi_X\varphi_Y)^2 + (\varphi_X - \varphi_Y)^2\big]\sigma_X^2\sigma_Y^2 + (1-\varphi_X^2)^2\sigma_Y^4$$

- Puisque $|\varphi_X| < 1$ et $|\varphi_Y| < 1$, chaque terme est ≥ 0 et les termes extrêmes sont > 0, donc $\Delta > 0$. La solution inversible $|\theta| < 1$ existe et est unique.

Paramètres de la partie MA(1) (2/2)

- **Cas symétrique :** $\varphi_X = \varphi_Y = \varphi$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- On obtient $A = 2(1+\varphi^2)\sigma^2$ et $B = 2\varphi\sigma^2$.
- L'équation $B\theta^2 - A\theta + B = 0$ donne :

$$\theta = \frac{2(1+\varphi^2) \pm 2(1-\varphi^2)}{4\varphi} = \frac{(1+\varphi^2) \pm (1-\varphi^2)}{2\varphi}$$

- Les deux solutions sont $\theta = \varphi$ et $\theta = 1/\varphi$. Comme $|\varphi| < 1$, la solution inversible est $\theta = \varphi$.
- La variance de l'innovation est $\sigma_\eta^2 = B/\theta = 2\varphi\sigma^2/\varphi = 2\sigma^2$.

Définition du processus ARMA(p,q)

- **Définition :** Le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus **ARMA(p,q)** s'il est défini par :
$$Y_t = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$
avec $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim BB(0, \sigma^2)$ et c, (φ_i), (θ_j) des paramètres réels.

- **Écriture avec polynômes retard :**
$$\Phi(L) Y_t = c + \Theta(L) \varepsilon_t$$
avec $\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_p L^p$ et $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$.

Condition de représentation minimale

- **Hypothèse importante :** On suppose que les racines des polynômes $\Phi(z)$ et $\Theta(z)$ sont **distinctes**, de façon à assurer que la représentation ARMA soit **minimale**.

- **Exemple de représentation non minimale :**

$$Y_t - aY_{t-1} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1}$$

- Cela semble être un ARMA(1,1), mais en fait :

$$(1 - aL)Y_t = (1 - aL)\varepsilon_t$$

- Les deux polynômes retard ont la même racine ! En simplifiant :

$$Y_t = \varepsilon_t$$

- C'est simplement un **bruit blanc**.

Stationnarité et inversibilité

- **Stationnarité :** Le processus ARMA(p,q) est **asymptotiquement stationnaire au second ordre** si et seulement si les racines de $\Phi(z)$ sont > 1 en module. (Condition sur la partie AR uniquement)

- **Inversibilité :** Le processus ARMA(p,q) est **inversible** (on peut le réécrire sous forme AR(∞)) si et seulement si les racines de $\Theta(z)$ sont > 1 en module. (Condition sur la partie MA uniquement)

- Un processus ARMA peut être stationnaire sans être inversible, et vice versa.

Espérance de l'ARMA(p,q)

- Sous l'hypothèse de stationnarité, calculons l'espérance.

- En prenant l'espérance de l'équation définissant le processus :

$$\mathbb{E}[Y_t] = c + \varphi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \cdots + \varphi_p \mathbb{E}[Y_{t-p}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] + \cdots$$

- Sachant que $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ et que l'espérance est constante :

$$\mu = c + \varphi_1 \mu + \cdots + \varphi_p \mu$$

- D'où :

$$\boxed{\mu = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \cdots - \varphi_p}}$$

- L'espérance ne dépend que de la **partie AR** du modèle.

Autocovariance : processus centré

- Pour calculer la fonction d'autocovariance $\gamma(h) = \mathbb{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)]$, on centre le processus.

- On pose $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$. On peut montrer que :

$$\tilde{Y}_t = \varphi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \cdots + \varphi_p \tilde{Y}_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- C'est le même modèle ARMA(p,q) mais **sans constante**.

- **Démonstration :** En substituant $\mu = c/(1 - \sum \varphi_i)$ dans l'équation originale et en simplifiant.

Exemple détaillé : ARMA(1,1)

- Soit le processus ARMA(1,1) :

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = \xi + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

avec $|\varphi| < 1$, $|\theta| < 1$, $\varphi \neq \theta$.

- **Espérance :**

$$\mu = \frac{\xi}{1-\varphi}$$

- **Processus centré :** $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ vérifie :

$$\tilde{Y}_t = \varphi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

ARMA(1,1) : calcul de $\gamma(0)$ (1/2)

- En multipliant l'équation centrée par $\tilde{Y}_t$ et en prenant l'espérance :

$$\gamma(0) = \varphi\gamma(1) + \mathbb{E}[(\tilde{Y}_t)\varepsilon_t] - \theta\mathbb{E}[(\tilde{Y}_t)\varepsilon_{t-1}]$$

- **Calcul de $\mathbb{E}[\tilde{Y}_t\varepsilon_t]$:** Puisque $\tilde{Y}_t = \varphi\tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$:

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_t\varepsilon_t] = \mathbb{E}[(\varphi\tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})\varepsilon_t] = \sigma^2$$

car ε_t est une innovation (orthogonale au passé de Y).

ARMA(1,1) : calcul de $\gamma(0)$ (2/2)

- **Calcul de $\mathbb{E}[\tilde{Y}_t \varepsilon_{t-1}]$:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{Y}_t \varepsilon_{t-1}] &= \mathbb{E}[(\varphi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) \varepsilon_{t-1}] \\
&= \varphi \mathbb{E}[\tilde{Y}_{t-1} \varepsilon_{t-1}] - \theta \sigma^2 \\
&= \varphi \mathbb{E}[(\varphi \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2}) \varepsilon_{t-1}] - \theta \sigma^2 \\
&= \varphi \sigma^2 - \theta \sigma^2 = (\varphi - \theta) \sigma^2
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\boxed{\gamma(0) = \varphi \gamma(1) + \sigma^2 (1 + \theta^2 - \varphi \theta)}$$

ARMA(1,1) : calcul de $\gamma(1)$

- En multipliant l'équation centrée par $\tilde{Y}_{t-1}$ et en prenant l'espérance :

$$\gamma(1) = \varphi\gamma(0) + \mathbb{E}[\tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t] - \theta\mathbb{E}[\tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_{t-1}]$$

- $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t] = 0$ car $\tilde{Y}_{t-1}$ ne dépend pas de ε_t
- $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_{t-1}] = \sigma^2$ (même calcul que précédemment)
- Donc :

$$\boxed{\gamma(1) = \varphi\gamma(0) - \theta\sigma^2}$$

ARMA(1,1) : résolution du système

- Nous avons le système :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \varphi\gamma(1) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta) \\ \gamma(1) = \varphi\gamma(0) - \theta\sigma^2 \end{cases}$$

- En substituant la deuxième équation dans la première :

$$\gamma(0) = \varphi(\varphi\gamma(0) - \theta\sigma^2) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta)$$

- Soit :

$$(1 - \varphi^2)\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2 - 2\varphi\theta)$$

- D'où :

$$\boxed{\gamma(0) = \sigma^2 \frac{\theta^2 - 2\varphi\theta + 1}{1 - \varphi^2}}$$

ARMA(1,1) : fonction d'autocovariance complète

- **Résultat :**

$$\begin{cases} \gamma(0) = \sigma^2 \dfrac{\theta^2 - 2\varphi\theta + 1}{1-\varphi^2} \\ \gamma(1) = \varphi\gamma(0) - \theta\sigma^2 \\ \gamma(h) = \varphi\gamma(h-1) \quad \forall |h| > 1 \end{cases}$$

- **Vérifications :**

- Si $\theta = 0$: on retrouve la fonction d'autocovariance de l'AR(1)

- Si $\varphi = 0$: on retrouve la fonction d'autocovariance du MA(1)

- **Propriété générale :** Dès que $h > q$ (l'ordre de la partie MA), le retour à zéro de $\gamma(h)$ est gouverné par la **partie AR** (dynamique géométrique).

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

La fonction génératrice des autocovariances

- Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire d'autocovariance $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h})$. La **fonction génératrice des autocovariances** (FGACV) est définie par :

$$g_X(z) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) z^h$$

  où z est une variable complexe.

- Puisque $\gamma(-h) = \gamma(h)$ (symétrie), on a $g_X(z) = g_X(z^{-1})$.

- Sur le cercle unité $z = e^{-i\omega}$, la FGACV donne la densité spectrale :

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} g_X(e^{-i\omega})$$

- La série converge absolument pour $|z| = 1$ lorsque $\sum_h |\gamma(h)| < \infty$.

Le processus ARMA(p, q)

- Considérons le processus ARMA(p, q) :

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

  où $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$ est le polynôme AR, $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$ est le polynôme MA, $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc et L est l'opérateur retard.

- **Condition de stationnarité :** toutes les racines de $\Phi(z) = 0$ sont à l'extérieur du cercle unité.

- **Condition d'inversibilité :** toutes les racines de $\Theta(z) = 0$ sont à l'extérieur du cercle unité.

Représentation MA(∞)

- Sous la condition de stationnarité, le processus admet une représentation de Wold :

$$X_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

  où $\psi(L) = \Theta(L)/\Phi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j$ avec $\psi_0 = 1$.

- Les coefficients ψ_j sont obtenus en développant $\Theta(z)/\Phi(z)$ en série entière :

$$\psi(z) = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \quad \text{pour } |z| \leq 1$$

- La série $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ est garantie par la stationnarité.

Autocovariance à partir de la représentation MA(∞)

- Pour le processus MA(∞) $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, l'autocovariance est :

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-h-k}\right)$$

- Puisque $\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t-h-k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{\{j=h+k\}}$, on obtient pour $h \geq 0$:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}$$

- Par symétrie, $\gamma(-h) = \gamma(h)$.

Démonstration de la FGACV : étape 1

Partons de la définition :

$$g_X(z) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) z^h$$

Substituons la formule de l'autocovariance pour $h \geq 0$:

$$g_X(z) = \sum_{h=-\infty}^{-1} \gamma(|h|) z^h + \gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) z^h$$

En utilisant $\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|}$:

$$g_X(z) = \sigma^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|} \right) z^h$$

Démonstration de la FGACV : étape 2

En réarrangeant la double somme (le théorème de Fubini s'applique grâce à la convergence absolue) :

$$g_X(z) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k z^{k-j}$$

Ceci peut se factoriser :

$$g_X(z) = \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^{-j} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k \right)$$

$$= \sigma^2 \, \psi(z^{-1}) \, \psi(z)$$

Démonstration de la FGACV : étape 3

- Rappelons que $\psi(z) = \Theta(z)/\Phi(z)$. Donc $\psi(z^{-1}) = \Theta(z^{-1})/\Phi(z^{-1})$.
- En substituant :

$$g_X(z) = \sigma^2 \cdot \frac{\Theta(z^{-1})}{\Phi(z^{-1})} \cdot \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$$

- La FGACV d'un processus ARMA(p, q) est donc :

$$\boxed{g_X(z) = \sigma^2 \frac{\Theta(z)\Theta(z^{-1})}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})}}$$

Interprétation de la formule

$$g_X(z) = \sigma^2 \frac{\Theta(z)\Theta(z^{-1})}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})}$$

- Le numérateur $\Theta(z)\Theta(z^{-1})$ capture la contribution de la composante MA.
- Le dénominateur $\Phi(z)\Phi(z^{-1})$ capture la contribution de la composante AR.
- Les produits comme $\Theta(z)\Theta(z^{-1})$ assurent la symétrie : si on remplace z par z^{-1}, la FGACV reste inchangée.
- Sur le cercle unité ($z = e^{-i\omega}$) :

$$g_X(e^{-i\omega}) = \sigma^2 \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$$

puisque $\Theta(e^{i\omega}) = \overline{\Theta(e^{-i\omega})}$.

Cas particuliers

- Processus MA(q) pur $(\Phi(z) = 1)$:

$$g_X(z) = \sigma^2 \Theta(z)\Theta(z^{-1})$$

- Processus AR(p) pur $(\Theta(z) = 1)$:

$$g_X(z) = \frac{\sigma^2}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})}$$

- Bruit blanc $(\Phi(z) = \Theta(z) = 1)$:

$$g_\varepsilon(z) = \sigma^2$$

ce qui confirme que $\gamma(0) = \sigma^2$ et $\gamma(h) = 0$ pour $h \neq 0$.

Processus MA(1) : mise en place

- Considérons le processus MA(1) :

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$$

avec $|\theta| < 1$ pour l'inversibilité.

- Polynômes : $\Phi(z) = 1$ (pas de composante AR) et $\Theta(z) = 1 + \theta z$.

- Formule de la FGACV :

$$g_X(z) = \sigma^2\Theta(z)\Theta(z^{-1}) = \sigma^2(1 + \theta z)(1 + \theta z^{-1})$$

Processus MA(1) : développement de la FGACV

- Développons le produit :

$$
\begin{aligned}
g_X(z) &= \sigma^2(1+\theta z)(1+\theta z^{-1}) \\
&= \sigma^2\left(1+\theta z^{-1}+\theta z+\theta^2\right) \\
&= \sigma^2\left(\theta z^{-1}+(1+\theta^2)+\theta z\right)
\end{aligned}
$$

- C'est un polynôme de Laurent avec des termes en z^{-1}, z^0 et z^1 uniquement.

- Le coefficient de z^h donne $\gamma(h)$.

Processus MA(1) : autocovariances

- De $g_X(z) = \sigma^2 \left(\theta z^{-1} + (1+\theta^2) + \theta z\right)$, on lit les autocovariances :

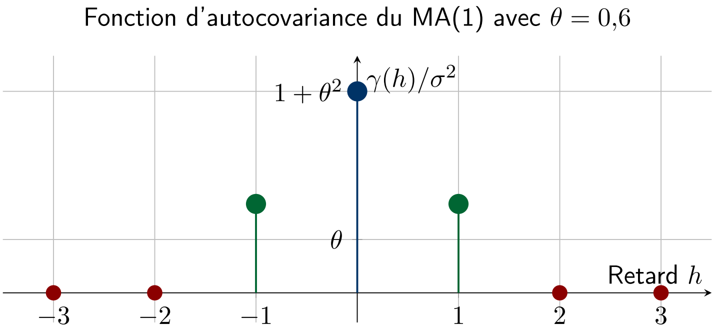
$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= \sigma^2(1+\theta^2) && \text{(coefficient de } z^0\text{)} \\
\gamma(\pm 1) &= \sigma^2\theta && \text{(coefficient de } z^{\pm 1}\text{)} \\
\gamma(h) &= 0 && \text{pour } |h| \geq 2
\end{aligned}
$$

- Autocorrélation d'ordre 1 :

$$\rho_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

- $|\rho_1| \leq 1/2$ pour tout θ, avec maximum atteint pour $\theta = 1$.

Processus MA(1) : illustration graphique



La fonction d'autocovariance du MA(1) a un support fini : elle « s'annule » après le retard 1.

Processus AR(1) : mise en place

- Considérons le processus AR(1) :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$$

avec $|\phi| < 1$ pour la stationnarité.

- Polynômes : $\Phi(z) = 1 - \phi z$ (polynôme AR) et $\Theta(z) = 1$ (pas de composante MA).

- Formule de la FGACV :

$$g_X(z) = \frac{\sigma^2}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})} = \frac{\sigma^2}{(1 - \phi z)(1 - \phi z^{-1})}$$

Processus AR(1) : développement en série

- Pour extraire les autocovariances, développons en série de Laurent. Puisque $|\phi| < 1$:

$$\frac{1}{1-\phi z} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z^j \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\phi z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^{-k}$$

- Par conséquent :

$$\begin{aligned} g_X(z) &= \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^{-k} \right) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{j+k} z^{j-k} \end{aligned}$$

Processus AR(1) : extraction des coefficients

- Le coefficient de z^h (pour $h \geq 0$) est obtenu lorsque $j - k = h$, soit $j = k + h$:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{(k+h)+k} = \sigma^2 \phi^h \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k}$$

- Puisque $\sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k} = \frac{1}{1-\phi^2}$:

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2 \phi^{|h|}}{1 - \phi^2} = \gamma(0)\phi^{|h|}$$

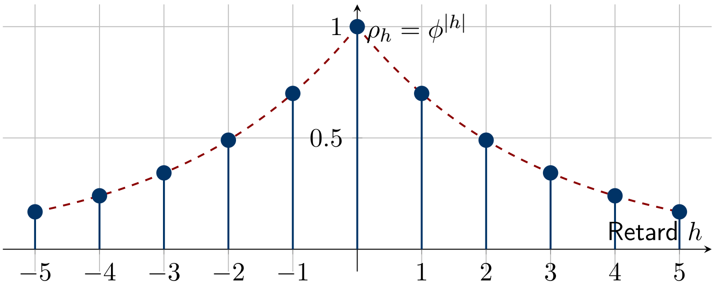
où $\gamma(0) = \dfrac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$ est la variance.

Processus AR(1) : propriétés

- $\gamma(h) = \gamma(0)\phi^{|h|}$ décroît géométriquement (**décroissance exponentielle**).
- Si $\phi > 0$, toutes les autocovariances sont positives (persistance). Si $\phi < 0$, les autocovariances alternent en signe (oscillation).
- La **demi-vie** est $h^* = -\log(2)/\log(|\phi|)$.
- Fonction d'autocorrélation :
$$\rho_h = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^{|h|}$$
La FAC de l'AR(1) « décroît » exponentiellement, contrairement au MA(1) qui « s'annule ».

Processus AR(1) : illustration graphique

Fonction d'autocorrélation de l'AR(1) avec $\phi = 0{,}7$



La FAC décroît exponentiellement avec l'enveloppe $\phi^{|h|}$ (ligne pointillée).

Processus ARMA(1,1) : mise en place

- Considérons le processus ARMA(1,1) :

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$$

avec $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

- Polynômes : $\Phi(z) = 1 - \phi z$ et $\Theta(z) = 1 + \theta z$.

- Formule de la FGACV :

$$g_X(z) = \sigma^2 \frac{(1 + \theta z)(1 + \theta z^{-1})}{(1 - \phi z)(1 - \phi z^{-1})}$$

Processus ARMA(1,1) : développement du numérateur

- Développons le numérateur :

$$(1+\theta z)(1+\theta z^{-1}) = \theta z^{-1} + (1+\theta^2) + \theta z$$

- Donc :

$$g_X(z) = \sigma^2 \frac{\theta z^{-1} + (1+\theta^2) + \theta z}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})}$$

- On peut écrire ceci comme une somme de trois termes :

$$g_X(z) = \frac{\sigma^2 \theta z^{-1}}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})} + \frac{\sigma^2 (1+\theta^2)}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})} + \frac{\sigma^2 \theta z}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})}$$

Processus ARMA(1,1) : utilisation du résultat AR(1)

- D'après l'analyse de l'AR(1), le coefficient de z^h dans $\dfrac{1}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})}$ est $c_h = \dfrac{\phi^{|h|}}{1-\phi^2}$.
- Chaque terme contribue à $\gamma(h)$:
  - $(1+\theta^2)c_h$ pour le terme constant
  - θc_{h+1} pour le terme en z^{-1}
  - θc_{h-1} pour le terme en z
- Par conséquent :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \left[(1+\theta^2)c_h + \theta c_{h+1} + \theta c_{h-1}\right]$$

Processus ARMA(1,1) : variance $\gamma(0)$

- Pour $h = 0$:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \sigma^2 \left[(1+\theta^2)c_0 + \theta c_1 + \theta c_{-1}\right] \\ &= \sigma^2 \left[\frac{1+\theta^2}{1-\phi^2} + \frac{2\theta\phi}{1-\phi^2}\right]\end{aligned}$$

- D'où la variance de l'ARMA(1,1) :

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2(1+2\theta\phi+\theta^2)}{1-\phi^2}$$

Processus ARMA(1,1) : première autocovariance $\gamma(1)$

- Pour $h = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \sigma^2 \left[(1+\theta^2)c_1 + \theta c_2 + \theta c_0\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\left[(1+\theta^2)\phi + \theta\phi^2 + \theta\right] \\ &= \frac{\sigma^2(\phi+\theta)(1+\theta\phi)}{1-\phi^2}\end{aligned}$$

- D'où :

$$\gamma(1) = \frac{\sigma^2(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1-\phi^2}$$

Processus ARMA(1,1) : autocovariances d'ordre supérieur

- Pour $h \geq 2$, la récurrence de Yule-Walker donne :

$$\gamma(h) = \phi\gamma(h-1) \quad \text{pour } h \geq 2$$

- Vérification : multiplions $X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ par X_{t-h} et prenons l'espérance :

$$\gamma(h) - \phi\gamma(h-1) = \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}] + \theta\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} X_{t-h}]$$

  Pour $h \geq 2$, les deux espérances sont nulles car ε_t et ε_{t-1} sont non corrélés avec X_{t-h}.

- Donc $\gamma(h) = \phi^{h-1}\gamma(1)$ pour $h \geq 1$.

Processus ARMA(1,1) : solution complète

- Autocovariances de l'ARMA(1,1) :

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2(1 + 2\theta\phi + \theta^2)}{1 - \phi^2}, \quad \gamma(1) = \frac{\sigma^2(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 - \phi^2}, \quad \gamma(h) = \phi^{h-1}\gamma(1) \ \ (h \geq 1)$$

- Autocorrélations :

$$\rho_1 = \frac{(1 + \theta\phi)(\phi + \theta)}{1 + 2\theta\phi + \theta^2}, \quad \rho_h = \phi^{h-1}\rho_1 \text{ pour } h \geq 1$$

- La FAC commence à ρ_1 (qui dépend à la fois de ϕ et θ) puis décroît exponentiellement au taux ϕ.

Effet des filtres linéaires sur la FGACV

- Soit $Y_t = \psi(L)X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ une version filtrée de X_t. La FGACV du processus filtré est :
$$g_Y(z) = \psi(z)\psi(z^{-1})g_X(z)$$

- Démonstration : puisque $Y_t = \psi(L)X_t$, nous avons :
$$Y_t = \psi(L)\left[\frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t\right] = \frac{\psi(L)\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t$$
L'application de la formule de la FGACV à cette nouvelle représentation MA(∞) donne le résultat.

Exemple : filtre de différence première

- Considérons la différence première $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1-L)X_t$. Ici $\psi(z) = 1 - z$, donc :

$$\psi(z)\psi(z^{-1}) = (1-z)(1-z^{-1}) = 2 - z - z^{-1}$$

- Si X_t est un AR(1) avec $g_X(z) = \dfrac{\sigma^2}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})}$:

$$g_{\nabla X}(z) = \frac{\sigma^2(2 - z - z^{-1})}{(1-\phi z)(1-\phi z^{-1})}$$

- En $z = 1$: $g_{\nabla X}(1) = 0$. La série différenciée a une « variance de long terme » nulle, ce qui est cohérent avec une sur-différenciation d'un processus stationnaire.

Sommes partielles et variance de long terme

- Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la somme partielle. La variance est :

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \gamma(t-s) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (n - |h|)\gamma(h)$$

- Pour n grand :

$$\frac{\mathbb{V}(S_n)}{n} \to g_X(1) = 2\pi f_X(0)$$

- C'est la **variance de long terme** ou **densité spectrale à la fréquence zéro**.

Variance de long terme pour les processus ARMA

- Pour un processus ARMA(p, q) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n} = g_X(1) = \sigma^2 \frac{\Theta(1)^2}{\Phi(1)^2} = \sigma^2 \frac{(1+\theta_1+\cdots+\theta_q)^2}{(1-\phi_1-\cdots-\phi_p)^2}$$

- Exemples :
  - AR(1) : $g_X(1) = \dfrac{\sigma^2}{(1-\phi)^2}$
  - MA(1) : $g_X(1) = \sigma^2(1+\theta)^2$
  - ARMA(1,1) : $g_X(1) = \sigma^2 \dfrac{(1+\theta)^2}{(1-\phi)^2}$
- Si $\Phi(1) = 0$ (racine unitaire), la variance de long terme est infinie, signalant une non-stationnarité.

Problème de factorisation spectrale

- Étant donné une FGACV $g_X(z)$, trouver une représentation MA(∞)

$$X_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

telle que $g_X(z) = \sigma^2\psi(z)\psi(z^{-1})$.

- **Factorisation canonique :** on cherche $\psi(z)$ avec :
  1. toutes les racines de $\psi(z)$ à l'extérieur du cercle unité (inversibilité)
  2. $\psi(0) = 1$ (normalisation)
- La FGACV fournit la « matière première » ; la factorisation spectrale extrait le filtre causal.

Exemple de factorisation

- Considérons la FGACV :

$$g_X(z) = \sigma^2 \frac{(1 + 0{,}5z)(1 + 0{,}5z^{-1})}{(1 - 0{,}8z)(1 - 0{,}8z^{-1})}$$

- Numérateur : $\Theta(z) = 1 + 0{,}5z$ a une racine en $z = -2$ (hors du cercle unité).
- Dénominateur : $\Phi(z) = 1 - 0{,}8z$ a une racine en $z = 1{,}25$ (hors du cercle unité).
- La représentation canonique est :

$$(1 - 0{,}8L)X_t = (1 + 0{,}5L)\varepsilon_t$$

C'est un processus ARMA(1,1) inversible avec $\phi = 0{,}8$ et $\theta = 0{,}5$.

Cas non inversible

- Considérons le processus MA(1) avec $\theta = 2$ (non inversible) :

$$X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$$

FGACV : $g_X(z) = \sigma^2(1+2z)(1+2z^{-1}) = \sigma^2(2z^{-1}+5+2z)$.

- En réarrangeant : $(1+2z)(1+2z^{-1}) = 4 \cdot (1+0{,}5z)(1+0{,}5z^{-1})$, d'où $g_X(z) = (2\sigma)^2(1+0{,}5z)(1+0{,}5z^{-1})$.

- Représentation inversible :

$$X_t = \eta_t + 0{,}5\eta_{t-1}, \quad \eta_t \sim BB(0, 4\sigma^2)$$

Les deux représentations ont la même FGACV (donc les mêmes propriétés du second ordre).

Résumé : résultats principaux

1. Définition de la FGACV : $g_X(z) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) z^h$
2. Formule ARMA : $g_X(z) = \sigma^2 \dfrac{\Theta(z)\Theta(z^{-1})}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})}$
3. Extraction des autocovariances : développer en série de Laurent, lire les coefficients de z^h
4. Filtrage linéaire : $g_Y(z) = \psi(z)\psi(z^{-1}) g_X(z)$
5. Variance de long terme : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(S_n)/n = g_X(1)$
6. Densité spectrale : $f_X(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} g_X(e^{-i\omega})$

Résumé : démarche pratique

Pour trouver les autocovariances d'un processus ARMA(p, q) :

1. Écrire $\Phi(z)$ et $\Theta(z)$
2. Calculer $g_X(z) = \sigma^2 \dfrac{\Theta(z)\Theta(z^{-1})}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})}$
3. Développer en série de Laurent en utilisant :
   - la multiplication directe pour les processus MA
   - les séries géométriques pour les processus AR
4. Lire $\gamma(h)$ comme coefficient de z^h
5. Vérifier avec les équations de Yule-Walker si nécessaire

Plan

Introduction

Le modèle Moyenne Mobile (MA)

Le modèle Autorégressif (AR)

Inversibilité des processus MA

Le modèle ARMA(p,q)

Fonction génératrice des autocovariances

Résumé et comparaison

Tableau récapitulatif

	MA(q)	**AR(p)**	**ARMA(p,q)**
Stationnarité	Toujours	Racines > 1	Racines AR > 1
Inversibilité	Racines > 1	Toujours	Racines MA > 1
$\gamma(h) = 0$ pour	$h > q$	Jamais	Jamais
Décroissance de $\gamma(h)$	Coupure nette	Géométrique	Géométrique (après $h > q$)

Pour un ARMA(p,q), la dynamique de retour à zéro de l'autocovariance est gouvernée par la partie AR pour $h > q$.

Résumé général

- **MA(q)** : autocorrélation nulle au-delà du rang q, toujours stationnaire.
- **AR(p)** : autocorrélation non nulle à tout ordre, décroissance géométrique.
  - Stationnaire si racines du polynôme retard > 1 en module
  - Pour $p \geq 3$: pas de condition explicite simple
- **ARMA(p,q)** : combine les deux structures.
  - Stationnarité : condition sur la partie AR
  - Inversibilité : condition sur la partie MA
  - Espérance : ne dépend que de la partie AR
  - Autocovariance : système de Yule-Walker étendu
- La **marche aléatoire** ($\varphi = 1$) : processus $I(1)$, non stationnaire.