Processus Stochastiques Stationnaires

Séries Temporelles

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Définition d'un processus stochastique

- Un **processus stochastique** est une suite de variables aléatoires réelles $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.
- Une **série temporelle** est une réalisation d'un processus stochastique.
- Pour caractériser complètement un processus stochastique, il faut spécifier la distribution jointe de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ pour tout $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $t_i \neq t_j$ pour tout $i \neq j$.
- Il faut énormément d'information pour définir complètement un processus stochastique.

Processus linéaires

- **Problème de l'inférence :** Comment estimer les paramètres du processus stochastique à partir d'une seule réalisation (série temporelle) ?
- Pour traiter ce problème, on se restreint aux **processus linéaires** : processus dont les distributions jointes sont caractérisées par les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\mu_t = \mathbb{E}[X_t]$$

$$\gamma(t, s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\right]$$

Propriété de la fonction d'autocovariance

- **Exercice :** Montrer que $\gamma(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s] - \mu_t \mu_s$.
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
\gamma(t,s) &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t X_s - X_t \mu_s - \mu_t X_s + \mu_t \mu_s\right] \\
&= \mathbb{E}[X_t X_s] - \mathbb{E}[X_t]\mu_s - \mu_t \mathbb{E}[X_s] + \mu_t \mu_s \\
&= \mathbb{E}[X_t X_s] - \mu_t \mu_s - \mu_t \mu_s + \mu_t \mu_s \\
&= \mathbb{E}[X_t X_s] - \mu_t \mu_s \quad \square
\end{aligned}$$

Le problème de l'estimation avec une seule réalisation

- **Exemple industriel :** Supposons qu'un processus stochastique décrit le diamètre d'un câble sortant d'une machine à intervalles réguliers (chaque mètre).
- Une série temporelle = mesures sur un câble de 1 km (1000 observations).
- Si l'on fabrique K câbles avec la même machine, on peut estimer μ_t :

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} X_t^{(j)}$$

  où $X_t^{(j)}$ est le diamètre du câble j au t-ème mètre.
- **Problème pour l'économiste :** On n'observe qu'une seule série temporelle pour le PIB... On ne peut pas « remonter le temps » pour obtenir une nouvelle réalisation.

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Définition de la stationnarité (au sens strict)

- Le processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est **stationnaire** si et seulement si la distribution jointe de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ est identique à la distribution jointe de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$ pour tout $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, avec $t_i \neq t_j$ pour $i \neq j$.
- La distribution jointe est **invariante dans le temps**.
- Pour les processus linéaires, nous n'avons pas besoin d'une définition si générale.

Stationnarité au second ordre

- Le processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit **stationnaire au second ordre** si et seulement si ses moments d'ordre 1 et 2 sont invariants :

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu \quad \forall t$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \gamma_0 \quad \forall t$$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$$

- Un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire au second ordre appartient à l'espace des variables aléatoires de carré intégrable (L_2). La norme dans cet espace est définie par :

$$\|X\| = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

Conséquences de la stationnarité au second ordre

- Si le processus est stationnaire au second ordre, alors :

  $$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h) \quad \forall t$$

  La covariance ne dépend pas du temps mais seulement de la **distance** h entre X_t et X_s.

- En nous restreignant aux processus stochastiques stationnaires, nous avons considérablement diminué le nombre de paramètres à estimer.

- Mais pour pouvoir effectivement estimer les paramètres (par exemple l'espérance), il faut aussi que le processus soit **ergodique**.

Ergodicité : intuition

- Le concept d'ergodicité est techniquement difficile, mais l'idée intuitive est que des variables aléatoires doivent être d'autant moins corrélées qu'elles sont éloignées dans le temps.

- Si on utilise une moyenne empirique pour estimer l'espérance :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$$

  alors $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ (sans biais) et surtout $\mathbb{V}[\bar{X}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, assurant la convergence de $\bar{X}_n$ vers μ.

- **Question clé :** Sous quelles conditions sur $\gamma(h)$ a-t-on $\mathbb{V}[\bar{X}_n] \to 0$?

Variance de la moyenne empirique (1/4)

- Calculons la variance de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$:

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right]$$

- En développant la variance de la somme :

$$\mathbb{V}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{t=1}^{n}(X_t-\mu)\right)^2\right] = \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$$

- Par stationnarité, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$, donc :

$$\mathbb{V}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right] = \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\gamma(t-s)$$

Variance de la moyenne empirique (2/4)

- On a $\mathbb{V}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right] = \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \gamma(t-s)$.
- Posons $h = t - s$. Pour chaque valeur de $h \in \{-(n-1), \ldots, n-1\}$, comptons le nombre de couples (t, s) tels que $t - s = h$:
  - Si $h = 0$: les couples $(1,1), (2,2), \ldots, (n,n) \Rightarrow n$ termes
  - Si $h = 1$: les couples $(2,1), (3,2), \ldots, (n, n-1) \Rightarrow n-1$ termes
  - Plus généralement, pour $h \in \{-(n-1), \ldots, n-1\}$: $n - |h|$ termes
- Donc :

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \gamma(t-s) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (n - |h|)\gamma(h)$$

Variance de la moyenne empirique (3/4)

- Nous avons donc :

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (n - |h|)\gamma(h)$$

- En utilisant la parité $\gamma(h) = \gamma(-h)$:

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \left[n\gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{n-1} (n-h)\gamma(h) \right]$$

- Résultat :

$$\boxed{\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{\gamma(0)}{n} + \frac{2}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right) \gamma(h)}$$

Variance de la moyenne empirique (4/4)

- **Cas 1 (bruit blanc) :** Si $\gamma(h) = 0$ pour $h \neq 0$:

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{\gamma(0)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \checkmark$$

- **Cas 2 (autocovariance constante) :** Si $\gamma(h) = c > 0$ pour tout h :

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{c}{n} + \frac{2c}{n}\left[n - 1 - \frac{n-1}{2}\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} c \neq 0 \quad \times$$

- La variance ne converge pas vers 0 : l'estimation est impossible.

Condition suffisante de convergence

- Si la fonction d'autocovariance est **absolument sommable** :

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| < +\infty$$

alors $\mathbb{V}[\bar{X}_n] \to 0$ quand $n \to \infty$.

- Démonstration : Si $\sum_h |\gamma(h)| < \infty$, alors :

$$\mathbb{V}[\bar{X}_n] \leq \frac{1}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} |\gamma(h)| \leq \frac{1}{n} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- Cette condition implique que $\gamma(h) \to 0$ suffisamment vite quand $|h| \to \infty$. Elle est satisfaite par la plupart des modèles ARMA.

Comportement asymptotique de la variance

- Quand $n \to \infty$, on peut montrer que :

$$n \cdot \mathbb{V}[\bar{X}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) = 2\pi f(0)$$

  où $f(\omega)$ est la densité spectrale du processus.

- La quantité $\sum_h \gamma(h) = 2\pi f(0)$ est appelée **variance de long terme**.

- Interprétation :
  - Si $\sum_h \gamma(h) > \gamma(0)$: la dépendance positive augmente la variance de $\bar{X}_n$.
  - Si $\sum_h \gamma(h) < \gamma(0)$: la dépendance négative diminue la variance de $\bar{X}_n$.

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Fonction d'autocovariance

- On note $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \gamma(h)$ la **fonction d'autocovariance** d'un processus stochastique stationnaire au second ordre.

- Propriétés :
  1. $\gamma(0) = \mathbb{V}[X_t] \geq 0$
  2. $\gamma(h) = \gamma(-h)$ (parité)
  3. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ pour tout h
  4. γ est une fonction **positive** (au sens de la positivité définie)

Démonstration de la parité

- **Propriété :** $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

- Démonstration : Il suffit de remarquer que

$$
\begin{aligned}
\gamma(-h) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) \\
&= \mathbb{E}\left[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)\right] \\
&= \gamma(h) \quad \square
\end{aligned}
$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance (1/2)

- Pour deux variables aléatoires U et V de carré intégrable :

$$|\mathrm{Cov}(U,V)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(U)} \cdot \sqrt{\mathbb{V}(V)}$$

- Démonstration : Sans perte de généralité, supposons $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = 0$. Alors $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}[UV]$ et $\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}[U^2]$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $(U + \lambda V)^2$ est positive, donc :

$$\mathbb{E}\left[(U+\lambda V)^2\right] \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- En développant :

$$\mathbb{E}[U^2] + 2\lambda\mathbb{E}[UV] + \lambda^2\mathbb{E}[V^2] \geq 0$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance (2/2)

- Nous avons un trinôme en λ :

$$P(\lambda) = \mathbb{E}[V^2]\lambda^2 + 2\mathbb{E}[UV]\lambda + \mathbb{E}[U^2] \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Pour qu'un trinôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$ soit toujours ≥ 0, son discriminant doit être ≤ 0 :

$$\Delta = 4\mathbb{E}[UV]^2 - 4\mathbb{E}[U^2]\mathbb{E}[V^2] \leq 0$$

- En prenant la racine carrée et en revenant aux variables non centrées :

$$\boxed{|\mathrm{Cov}(U,V)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(U)} \cdot \sqrt{\mathbb{V}(V)}} \quad \square$$

Démonstration de $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

- **Propriété :** $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ pour tout h.
- Cette propriété découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- En appliquant cette inégalité à $U = X_t$ et $V = X_{t-h}$:

$$|\gamma(h)| = |\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h})| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X_t)} \cdot \sqrt{\mathbb{V}(X_{t-h})}$$

- Par stationnarité, $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(X_{t-h}) = \gamma(0)$, donc :

$$|\gamma(h)| \leq \sqrt{\gamma(0)} \cdot \sqrt{\gamma(0)} = \gamma(0) \quad \square$$

Interprétation et conséquences

- L'inégalité $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ signifie que la covariance entre X_t et X_{t-h} ne peut jamais dépasser (en valeur absolue) la variance du processus.

- **Cas d'égalité :** $|\gamma(h)| = \gamma(0)$ si et seulement si X_t et X_{t-h} sont parfaitement corrélés.

- En divisant par $\gamma(0) > 0$, on obtient :

$$\left| \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \right| \leq 1 \quad \forall h$$

- Le ratio $\gamma(h)/\gamma(0)$ est toujours compris entre -1 et 1. Ce ratio définit la **fonction d'autocorrélation** $\rho(h)$.

Positivité de la fonction d'autocovariance

- Dire que la fonction d'autocovariance est **positive** ne veut pas dire que $\gamma(h) \geq 0$ pour tout h. Cette propriété découle de la positivité de la variance.
- On sait que $\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}\right] \geq 0$ pour tout vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$.
- Supposons $\mathbb{E}[X_{t_i}] = 0$ pour tout i. Alors :

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma(t_i - t_j)$$

- Cette double somme doit être ≥ 0 pour tout vecteur $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Théorème de construction

- Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stochastique stationnaire et si $(a_i)_{i\geq 0}$ est une suite de nombres réels **absolument sommable** :

  $$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < +\infty$$

  alors

  $$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i}$$

  définit un nouveau processus stochastique stationnaire.

Éléments de preuve (1/2)

- Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est de carré intégrable, alors il en va de même pour $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$.
- En effet :

$$\|Y_t\| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i}\right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \|X_{t-i}\| = \|X\| \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < +\infty$$

- L'espérance de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathbb{E}[X_{t-i}] = \mu \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \mu_Y$$

- L'espérance est constante et ne dépend pas de t.

Éléments de preuve (2/2)

- La fonction d'autocovariance de $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est :

$$\begin{aligned}\gamma_Y(h) &= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-h-j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i a_j \gamma_X(h+i-j)\end{aligned}$$

- Les moments d'ordre 1 et 2 sont bien indépendants du temps. $\square$

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Bruit blanc

- Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ une suite de variables aléatoires **indépendamment et identiquement distribuées** (bruit blanc) avec :

$$\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \forall t$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$\gamma(h) = 0 \quad \forall h \neq 0$$

- Ce processus stochastique est stationnaire.

- On note souvent : $X_t \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ ou $\varepsilon_t \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$.

Définition du processus MA(1)

- Définissons un nouveau processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$:

$$Y_t = \lambda X_t + \rho X_{t-1}$$

- En termes du théorème précédent : $a_0 = \lambda$, $a_1 = \rho$, $a_i = 0$ pour $i \notin \{0, 1\}$.
- On montre facilement qu'il s'agit d'un processus stochastique stationnaire au second ordre.

Espérance du processus MA(1)

- L'espérance est nulle pour tout t :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}[\lambda X_t + \rho X_{t-1}] \\
&= \lambda \mathbb{E}[X_t] + \rho \mathbb{E}[X_{t-1}] \\
&= \lambda \cdot 0 + \rho \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Variance du processus MA(1)

- La variance est finie et constante :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[Y_t] &= \mathbb{V}[\lambda X_t + \rho X_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}\left[(\lambda X_t + \rho X_{t-1})^2\right] \quad \text{(car } \mathbb{E}[Y_t] = 0\text{)} \\
&= \mathbb{E}\left[\lambda^2 X_t^2 + 2\lambda\rho X_t X_{t-1} + \rho^2 X_{t-1}^2\right] \\
&= \lambda^2 \mathbb{E}[X_t^2] + 2\lambda\rho \underbrace{\mathbb{E}[X_t X_{t-1}]}_{=0 \text{ (indép.)}} + \rho^2 \mathbb{E}[X_{t-1}^2] \\
&= (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Fonction d'autocovariance du MA(1)

- Calculons la fonction d'autocovariance $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h})$:

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{Cov}(\lambda X_t + \rho X_{t-1}, \lambda X_{t-h} + \rho X_{t-h-1}) \\
&= \lambda^2 \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) + \lambda\rho \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h-1}) \\
&\quad + \rho\lambda \mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-h}) + \rho^2 \mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-h-1})
\end{aligned}$$

- Au total :

$$\gamma(h) = \begin{cases} (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ \lambda\rho\sigma^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Interprétation

- Contrairement au processus d'origine $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ (bruit blanc), le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ admet de la **dépendance** (relativement limitée).
- La covariance entre Y_t et Y_{t-1} est non nulle : $\gamma(1) = \lambda\rho\sigma^2$.
- Mais cette dépendance est de **courte mémoire** : $\gamma(h) = 0$ pour $|h| > 1$.
- Ce processus est appelé **MA(1)** (moyenne mobile d'ordre 1).

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Innovation d'un processus

- Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stochastique stationnaire au second ordre, on définit son **innovation** par :
$$\varepsilon_t = X_t - X_t^*$$
où X_t^* est la régression linéaire de X_t sur son passé $(X_s, s < t)$.

- X_t^* est la meilleure prévision (linéaire) de X_t basée sur l'ensemble d'information $I_t = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}$.

- Par construction, l'innovation ε_t est non corrélée avec le passé de X : elle peut être interprétée comme une **erreur de prévision**.

- On peut montrer que si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est stationnaire au second ordre, alors son innovation est un **bruit blanc**.

Fonction d'autocorrélation

- La **fonction d'autocorrélation** est définie par :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

- $\rho(h)$ mesure la corrélation entre X_t et X_{t+h} (ou X_{t-h}) :

$$\rho(h) = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+h})$$

- La fonction d'autocorrélation est une normalisation de la fonction d'autocovariance. Elle hérite de ses propriétés : parité et positivité.

Exemple

- Soit $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc. On définit le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$:

$$X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-12}$$

- La fonction d'autocovariance est :

$$\gamma(h) = \begin{cases} 2\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ -\sigma^2 & \text{si } h = \pm 12 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La fonction d'autocorrélation est :

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h = \pm 12 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Matrice d'autocorrélation

- La **matrice d'autocorrélation** d'ordre m contient les corrélations entre m X successifs : $X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+m-1}$.

$$R(m) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(m-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(m-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(m-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(m-1) & \rho(m-2) & \rho(m-3) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- La positivité de la fonction $\rho(h)$ implique que $R(m)$ est une **matrice définie positive** :

$$\mathbf{a}' R(m) \mathbf{a} > 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

Contraintes sur l'autocorrélation d'ordre 1

- $|R(m)| > 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

- Application pour $m = 2$:

$$|R(2)| > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow 1 - \rho(1)^2 > 0$$

- L'autocorrélation d'ordre 1 doit être strictement inférieure à 1 en valeur absolue :

$$|\rho(1)| < 1$$

Contraintes sur l'autocorrélation d'ordre 2

- Application pour $m = 3$:

$$|R(3)| > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix} > 0$$

- Après calcul du déterminant, on obtient la contrainte :

- Les valeurs possibles de $\rho(2)$ sont contraintes par $\rho(1)$:

$$\rho(2) \in \left[2\rho(1)^2 - 1, 1\right)$$

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Prévision linéaire

- Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique stationnaire au second ordre.
- On s'intéresse à la meilleure prévision linéaire de X_t étant données les K valeurs précédentes : $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-K}$.
- En supposant $\mathbb{E}[X_t] = 0$:

$$\mathbb{E}[X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-K}] = a_1^{(K)} X_{t-1} + a_2^{(K)} X_{t-2} + \cdots + a_K^{(K)} X_{t-K}$$

- Le vecteur $\mathbf{a}^{(K)} = (a_1^{(K)}, a_2^{(K)}, \dots, a_K^{(K)})'$ est donné par :

$$\mathbf{a}^{(K)} = R(K)^{-1} \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(K) \end{pmatrix}$$

Coefficient de corrélation partielle

- Le **coefficient de corrélation partielle** est :

$$r(K) = a_K^{(K)}$$

Il mesure le lien entre X_t et X_{t-K} une fois que l'on a purgé l'effet de $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-K+1}$.

- Les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle sont **équivalentes** :
  - $r(K)$ est une fonction de $(\rho(1), \dots, \rho(K))$
  - Inversement, on peut déduire $\rho(K)$ de $(r(1), r(2), \dots, r(K))$
- Pour $K = 1$: $a_1^{(1)} = r(1) = \rho(1)$.

Expression explicite de l'autocorrélation partielle

- En utilisant la structure par blocs de la matrice, on peut montrer :

$$r(1) = \rho(1)$$

$$r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

- Plus généralement, on peut obtenir une expression explicite de $r(K)$ en exploitant la structure de la matrice d'autocorrélation.

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Introduction à l'approche fréquentielle

- Une façon alternative de caractériser un processus stochastique est d'étudier la **densité spectrale**.

- Cette approche est équivalente à la fonction d'autocovariance.

- Plutôt que d'aborder un processus stochastique dans le **domaine temporel**, on s'intéresse au **domaine des fréquences**.

- On considère un processus de la forme :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}) \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ et (a_i) est absolument sommable.

Fonction d'autocovariance du processus X

Calcul de $\gamma(h)$: Pour $h \geq 0$,

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-h-j}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i a_j \mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-h-j})$$

La covariance $\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-h-j})$ est non nulle uniquement si $t - i = t - h - j$, i.e., $j = i - h$.

Donc pour $h \geq 0$:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{i=h}^{\infty} a_i a_{i-h} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+h} a_i$$

Par parité : $\gamma(-h) = \gamma(h)$.

Sommabilité absolue de $\gamma(h)$

Théorème

Si (a_i) est absolument sommable, alors $\gamma(h)$ est absolument sommable.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left| \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i a_{i+|h|} \right| \\ &\leq \sigma^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i||a_{i+|h|}|\end{aligned}$$

En échangeant les sommes et en posant $j = i + |h|$:

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| \leq \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| = \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right)^2 < +\infty$$

La fonction d'autocovariance doit donc converger suffisament rapidement vers zéro.

Définition de la densité spectrale

- La **densité spectrale** du processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est la fonction réelle définie par :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}$$

pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

- Cette fonction existe car $\gamma(h)$ est absolument sommable.

- On peut montrer que :

$$f(\omega) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos(\omega h)$$

- La densité spectrale est une fonction continue, périodique et symétrique.

La densité spectrale est à valeurs réelles

- La définition $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}$ fait intervenir des exponentielles complexes. Montrons que $f(\omega) \in \mathbb{R}$.

- On regroupe les termes symétriques et on utilise $\gamma(-h) = \gamma(h)$:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \left(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h} \right) \right]$$

- Or $e^{-i\omega h} + e^{i\omega h} = 2\cos(\omega h)$, d'où :

$$\boxed{f(\omega) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos(\omega h) \in \mathbb{R}}$$

Symétrie de la densité spectrale

- La représentation en cosinus montre immédiatement que f est une fonction **paire** :

$$f(-\omega) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h)\cos(-\omega h) = f(\omega)$$

  car $\cos(-x) = \cos(x)$.

- De plus, f est 2π-**périodique** car $\cos(\omega h)$ est 2π-périodique en ω.

- En combinant parité et périodicité, il suffit de connaître f sur $[0, \pi]$ pour la connaître partout.

- C'est pourquoi on représente généralement la densité spectrale sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Équivalence avec la fonction d'autocovariance

- La densité spectrale et la fonction d'autocovariance sont **équivalentes**.
- De l'autocovariance à la densité spectrale : définition de $f(\omega)$.
- De la densité spectrale à l'autocovariance :

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos(\omega h) \, d\omega$$

- En particulier, la variance s'exprime comme une intégrale de la densité spectrale :

$$\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \, d\omega$$

De la densité spectrale à l'autocovariance

- On part de la définition et on intègre contre $e^{i\omega k}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h} e^{i\omega k}\, d\omega$$

- En intervertissant somme et intégrale :

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-h)}\, d\omega$$

- Or $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-h)}\, d\omega = 2\pi$ si $k = h$, et 0 sinon (orthogonalité). Donc tous les termes s'annulent sauf celui où $h = k$:

$$\boxed{\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k}\, d\omega}$$

Orthogonalité des exponentielles complexes

- Posons $n = k - h$ et calculons $\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega}\, d\omega$ pour $n \neq 0$.

- En utilisant $e^{in\omega} = \cos(n\omega) + i\sin(n\omega)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\omega)\, d\omega = \left[\frac{\sin(n\omega)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)}{n} = 0$$

car $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.

- De même :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\omega)\, d\omega = \left[-\frac{\cos(n\omega)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)}{n} = 0$$

- Si $n = 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\cdot 0\cdot\omega}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, d\omega = 2\pi$.

Exemple : Densité spectrale d'un bruit blanc

- Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance nulle et de variance σ^2 (bruit blanc).
- La fonction d'autocovariance est :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La densité spectrale est donc :

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

- La densité spectrale est **constante** : toutes les fréquences contribuent également à la variance du processus. C'est pourquoi on parle de **bruit blanc**.

Réciproque

- Si la densité spectrale est plate (constante), alors le processus associé est un bruit blanc.

- Démonstration : Supposons que $f(\omega) = \kappa > 0$ pour tout ω. Alors :

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \kappa \cos(\omega h)\, d\omega = \begin{cases} \kappa \cdot 2\pi & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est bien un bruit blanc de variance $2\pi\kappa$. $\square$

Interprétation de la densité spectrale

- La densité spectrale $f(\omega)$ mesure la **contribution de la fréquence** ω à la variance totale du processus :

$$\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\, d\omega = 2\int_{0}^{\pi} f(\omega)\, d\omega$$

- Un **pic** dans $f(\omega)$ à la fréquence ω_0 indique une composante cyclique dominante de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{(en nombre de périodes d'échantillonnage)}$$

- Exemples :
  - $\omega_0 = \pi \Rightarrow T = 2$: oscillation à la fréquence maximale (alternance)
  - $\omega_0 = \pi/6 \Rightarrow T = 12$: cycle annuel pour des données mensuelles
  - $\omega_0 \approx 0 \Rightarrow T \to \infty$: composante de très basse fréquence (tendance)

Identification des cycles

- En pratique, on estime $f(\omega)$ à partir des données (périodogramme) et on recherche les pics.
- Les **hautes fréquences** (ω proche de π) correspondent aux fluctuations rapides, de courte période.
- Les **basses fréquences** (ω proche de 0) correspondent aux mouvements lents, de longue période.
- Un processus avec $f(\omega)$ concentré près de $\omega = 0$ est **persistant** : les chocs ont des effets durables.
- Un processus avec $f(\omega)$ concentré près de $\omega = \pi$ est **antipersistant** : tendance au retour à la moyenne rapide.

Densité spectrale d'une transformation linéaire

- Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire de densité spectrale $f_X(\omega)$. Soit $(a_i)_{i\geq 0}$ une suite absolument sommable. Alors le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i}$$

a pour densité spectrale :

$$f_Y(\omega) = \left| \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-i\omega i} \right|^2 f_X(\omega)$$

Plan

Introduction aux processus stochastiques

Stationnarité

Moments d'un processus stationnaire

Construction de processus stationnaires

Exemple : Processus MA(1)

Fonction d'autocorrélation

Matrice d'autocorrélation et contraintes

Autocorrélation partielle

Densité spectrale

Opérateur retard

Définition de l'opérateur retard

- L'**opérateur retard** L transforme un processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ en un processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ tel que :

$$Y_t = LX_t = X_{t-1}$$

- Cet opérateur est linéaire et inversible.
- Son inverse est l'**opérateur avance** F :

$$Z_t = FX_t = X_{t+1}$$

- Par construction : $L \cdot F = F \cdot L = 1$.
- En appliquant plusieurs fois l'opérateur retard :

$$L^k X_t = X_{t-k}$$

Polynômes en L

- On peut définir des **polynômes en** L :

$$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i L^i\right) X_t = \sum_{i=0}^{p} a_i X_{t-i}$$

- On peut aussi définir des **séries en** L (ou F). On doit bien sûr se restreindre à des processus stationnaires pour que cela ait un sens.

- Si $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est stationnaire au second ordre et $(a_i)_{i \geq 0}$ absolument sommable, alors :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i\right) X_t$$

est aussi stationnaire.

Propriétés des séries en L

- **Addition :**
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i L^i\right) X_t = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) L^i X_t$$
où la suite $(a_i + b_i)$ est absolument sommable.

- **Multiplication :**
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j\right) X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L^k X_t$$
où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ et la suite (c_k) est absolument sommable.

Démonstration de la multiplication (1/2)

- Notons $A(L) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i$ et $B(L) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j$.

- Calculons $A(L)B(L)X_t$:

$$A(L)B(L)X_t = A(L)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X_{t-j}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_{t-j-i}$$

- En posant $k = i + j$ et en réorganisant :

$$A(L)B(L)X_t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X_{t-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X_{t-k}$$

où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ est le **produit de convolution**.

Démonstration de la multiplication (2/2)

- Il reste à montrer que la suite (c_k) est absolument sommable.
- On a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} |a_i||b_{k-i}|$$

- En changeant l'ordre de sommation :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) < +\infty$$

car (a_i) et (b_j) sont absolument sommables. $\square$

- Le produit de deux séries absolument sommables est absolument sommable : l'ensemble des séries en L forme une **algèbre**.

Inversibilité du polynôme $(1-\lambda L)$

- Le polynôme retard $\phi(L) = 1 - \lambda L$ est inversible dès lors que $|\lambda| < 1$.

- Démonstration : Posons $a_i = \lambda^i$ pour $i \geq 0$. La suite (a_i) est absolument sommable (série géométrique convergente car $|\lambda| < 1$).

- En multipliant par $\phi(L) = 1 - \lambda L$:

$$\begin{aligned}(1-\lambda L)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i L^i &= \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i L^i - \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i+1}L^{i+1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i L^i - \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i L^i = 1\end{aligned}$$

- Ainsi $(1-\lambda L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i L^i$. $\square$

Interprétation

- Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire au second ordre.
- Alors le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i}$$

est l'unique processus stationnaire au second ordre solution de l'équation :

$$Z_t - \lambda Z_{t-1} = X_t \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \lambda L) Z_t = X_t$$

- Il existe d'autres solutions (une infinité), mais elles ne sont pas stationnaires au second ordre.
- **Analogie :** $u_n = \lambda u_{n-1} + b$ a une unique solution constante : $u^* = \frac{b}{1-\lambda}$.

Inversion d'un polynôme général

- Soit la fonction polynomiale :

$$\phi(z) = 1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots + \phi_p z^p$$

  dont les racines $z_j = \frac{1}{\lambda_j}$ sont plus grandes que 1 en module.

- Il existe une série $\psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i$ telle que $\phi(z) \cdot \psi(z) = 1$.

- Le polynôme retard $\phi(L) = 1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p$ est inversible et admet pour inverse $\psi(L)$.

Méthode d'inversion par identification (1/2)

- On cherche $\psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i$ tel que $\phi(z) \cdot \psi(z) = 1$.

- Développons le produit :

$$(1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots + \phi_p z^p)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots) = 1$$

- En regroupant par puissances de z :

$$\begin{aligned}
z^0 : &\quad \psi_0 = 1 \\
z^1 : &\quad \psi_1 + \phi_1 \psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = -\phi_1 \\
z^2 : &\quad \psi_2 + \phi_1 \psi_1 + \phi_2 \psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = -\phi_1 \psi_1 - \phi_2
\end{aligned}$$

Méthode d'inversion par identification (2/2)

- **Formule de récurrence générale :** Pour $k \geq 1$:

$$\boxed{\psi_k = -\sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_j \psi_{k-j}}$$

avec la convention $\psi_0 = 1$ et $\phi_j = 0$ pour $j > p$.

- **Exemple :** Pour $\phi(L) = 1 - 0.8L$ (AR(1) avec $\phi_1 = -0.8$) :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1 \\
\psi_1 &= -(-0.8) \cdot 1 = 0.8 \\
\psi_2 &= -(-0.8) \cdot 0.8 = 0.64 = 0.8^2 \\
\psi_k &= 0.8^k
\end{aligned}$$

- On retrouve $(1 - 0.8L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 0.8^k L^k$.

Cas des racines unitaires : le problème

- Que se passe-t-il si le polynôme $\phi(z)$ admet une ou plusieurs racines de module 1 (racines unitaires) ?

- Si $\phi(z)$ admet une racine z_0 avec $|z_0| = 1$, alors le polynôme retard $\phi(L)$ n'est **pas inversible** au sens usuel : il n'existe pas de série $\psi(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^i$ avec (ψ_i) absolument sommable telle que $\phi(L)\psi(L) = 1$.

- **Exemple** : Le polynôme $\phi(L) = 1 - L$ a pour racine $z = 1$ (racine unitaire).

- L'inverse formel serait $\sum_{i=0}^{\infty} L^i$, mais la suite $(1, 1, 1, \ldots)$ n'est pas absolument sommable.

Factorisation avec racines unitaires

- Supposons que $\phi(z)$ admette k racines unitaires. On peut factoriser :

$$\phi(z) = (1 - z)^k \tilde{\phi}(z)$$

où $\tilde{\phi}(z)$ est un polynôme dont toutes les racines sont de module > 1.

- En termes d'opérateur retard :

$$\phi(L) = (1 - L)^k \tilde{\phi}(L)$$

- Remarques :
  - $(1 - L)$ est l'**opérateur de différenciation** : $(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$
  - $(1 - L)^k$ correspond à la différenciation d'ordre k : $\Delta^k X_t$
  - $\tilde{\phi}(L)$ est inversible car ses racines sont de module > 1

Inversion partielle

- Bien que $\phi(L)$ ne soit pas globalement inversible, on peut écrire :

  $$\phi(L) = (1 - L)^k \tilde{\phi}(L)$$

  et inverser la partie $\tilde{\phi}(L)$:

  $$\tilde{\phi}(L)^{-1} = \tilde{\psi}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i L^i$$

  avec $(\tilde{\psi}_i)$ absolument sommable.

- Si $\phi(L)Y_t = X_t$, alors :

  $$(1 - L)^k \tilde{\phi}(L) Y_t = X_t \quad \Rightarrow \quad (1 - L)^k Y_t = \tilde{\psi}(L) X_t$$

- On peut exprimer $\Delta^k Y_t$ en fonction de X_t, mais pas Y_t directement.

Processus intégrés

- Un processus (Y_t) est dit **intégré d'ordre** k, noté $Y_t \sim I(k)$, si :
  - Y_t n'est pas stationnaire
  - $\Delta^k Y_t = (1-L)^k Y_t$ est stationnaire
- **Exemple :** La marche aléatoire $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$.
- On a $(1-L)Y_t = \varepsilon_t$, donc $\Delta Y_t = \varepsilon_t$ est stationnaire. Ainsi $Y_t \sim I(1)$.
- De nombreuses séries économiques (PIB, prix, indices boursiers) sont $I(1)$: leur niveau n'est pas stationnaire, mais leur taux de croissance l'est.

Résolution avec racines unitaires

- Si $\phi(L)$ a k racines unitaires, on ne peut pas inverser $\phi(L)$ directement, mais on peut :

- **1. Différencier** le processus k fois pour éliminer les racines unitaires :

$$\phi(L)Y_t = X_t \quad \Rightarrow \quad \tilde{\phi}(L)\Delta^k Y_t = X_t$$

- **2. Inverser** $\tilde{\phi}(L)$ (qui n'a plus de racines unitaires) :

$$\Delta^k Y_t = \tilde{\psi}(L)X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i X_{t-i}$$

- **3. Intégrer** k fois pour retrouver Y_t (avec k constantes d'intégration).

Interprétation des constantes d'intégration

- L'intégration introduit k **constantes d'intégration** qui correspondent aux **conditions initiales**.

- **Exemple pour $k = 1$:** Si $\Delta Y_t = Z_t$ où Z_t est connu, alors :

$$Y_t = Y_0 + \sum_{s=1}^{t} Z_s$$

  La constante Y_0 est la **condition initiale**.

- **Exemple pour $k = 2$:** Si $\Delta^2 Y_t = Z_t$, alors :

$$Y_t = Y_0 + t \cdot \Delta Y_0 + \sum_{s=1}^{t} (t - s + 1) Z_s$$

- Ces conditions initiales déterminent le **niveau** du processus mais n'affectent pas sa dynamique.

Conclusion sur les racines unitaires

- Les racines unitaires empêchent l'inversion directe mais permettent une représentation du processus différencié. C'est la base de l'analyse des séries non stationnaires.
- Points clés :
  - Un polynôme avec k racines unitaires ne peut pas être inversé en une série absolument sommable
  - On factorise : $\phi(L) = (1 - L)^k \tilde{\phi}(L)$ où $\tilde{\phi}(L)$ est inversible
  - Le processus différencié $\Delta^k Y_t$ admet une représentation stationnaire
  - Les k conditions initiales déterminent le niveau mais pas la dynamique

Résumé

- Un **processus stochastique** est une suite de variables aléatoires.
- La **stationnarité** (au second ordre) simplifie considérablement l'inférence.
- La **fonction d'autocovariance** $\gamma(h)$ caractérise les dépendances.
- La **fonction d'autocorrélation** $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$ normalise les dépendances.
- L'**autocorrélation partielle** $r(K)$ mesure le lien direct entre X_t et X_{t-K}.
- La **densité spectrale** $f(\omega)$ donne une vision fréquentielle équivalente.
- L'**opérateur retard** L permet une écriture compacte des modèles.