

SÉRIES TEMPORELLES

UNIVERSITÉ DU MANS (EXAMEN, L3)

EXERCICE 1 Soit le processus AR(2) défini par :

$$Y_t = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}Y_{t-1} - \frac{1}{8}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 .

- (1) Montrer que ce processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre.
- (2) Calculer son espérance.
- (3) Écrire les équations de Yule-Walker et en déduire les expressions des autocovariances $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ en fonction de σ_ε^2 .
- (4) Donner la relation de récurrence vérifiée par l'autocovariance $\gamma(h)$ pour tout $h \geq 1$, puis en déduire la forme générale de $\gamma(h)$.

EXERCICE 2 Supposons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un ARMA(1, 1) de la forme :

$$y_t = 1 - \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1}$$

avec ε_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance 1.

- (1) Le processus est-il asymptotiquement stationnaire au second ordre et inversible? Justifiez votre réponse.

On suppose que les conditions initiales sont telles que le processus est stationnaire au second ordre.

- (2) Quelles sont les implications de cette hypothèse sur les moments d'ordre 1 et 2? (3) Calculez l'espérance (on notera μ). (4) Calculez les autocovariances $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. (5) Établir la relation de récurrence vérifiée par $\gamma(h)$ pour $h \geq 2$ et en

déduire une expression explicite. (6) Que peut-on dire du signe de la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ lorsque h varie?

EXERCICE 3 Soit le processus AR(2) gaussien :

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, indépendants entre eux. On note $\mathcal{Y}_T \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ l'échantillon observé et $\theta = (c, \varphi_1, \varphi_2, \sigma_\varepsilon^2)'$ le vecteur des paramètres. On supposera dans tout l'exercice que le processus est stationnaire.

- (1) En utilisant le théorème de Bayes, écrire la décomposition de la vraisemblance exacte. Pourquoi cette vraisemblance est-elle plus délicate à manipuler que dans le cas d'un AR(1)?

- (2) Définir et écrire la vraisemblance conditionnelle (on conditionnera par rapport aux deux premières observations y_1 et y_2). En quoi diffère-t-elle de la vraisemblance exacte et quel est son intérêt pratique?

- (3) Donner l'expression de la log-vraisemblance conditionnelle. Montrer qu'à σ_ε^2 fixé, la maximisation de la log-vraisemblance conditionnelle par rapport à $(c, \varphi_1, \varphi_2)$ équivaut à un problème de moindres carrés ordinaires. En déduire l'estimateur correspondant sous forme matricielle.

EXERCICE 4 Soit $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus AR(1) stationnaire :

$$x_t = \rho x_{t-1} + \eta_t, \quad |\rho| < 1$$

où η_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_η^2 . On observe en réalité x_t avec une erreur de mesure :

$$y_t = x_t + \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ_ε^2 , indépendant du processus $\{\eta_s, s \in \mathbb{Z}\}$.

(1) En utilisant le polynôme retard, montrer que le processus y_t vérifie :

$$(1 - \rho L)y_t = \eta_t + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

(2) Calculer la fonction d'autocovariance du membre de droite $\xi_t \equiv \eta_t + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$. En déduire que ξ_t admet une représentation MA(1) du type $\xi_t = u_t - \theta u_{t-1}$ où u_t est un bruit blanc de variance σ_u^2 .

(3) En déduire que y_t est un processus ARMA(1,1) que l'on explicitera. Donner le système d'équations vérifié par les paramètres θ et σ_u^2 de la représentation.

(4) Le processus y_t est-il stationnaire au second ordre? Est-il inversible? Justifier.