

ÉCONOMÉTRIE DES VARIABLES QUALITATIVES

UNIVERSITÉ DU MANS (RATTRAPAGE, L3)

Mardi 17 juin 2025

(1) Soit un échantillon de variables dichotomiques (y_1, \dots, y_N) identiquement et indépendamment distribués selon une loi de Bernoulli de paramètre p . Chaque y vaut 1 avec probabilité p ou 0 avec probabilité $(1 - p)$. Calculer l'espérance et la variance de y .

(2) Écrire la fonction de probabilité de y .

(3) Écrire la fonction de log-vraisemblance.

(4) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p .

(5) Calculer la variance de cet estimateur (à partir de l'expression de l'estimateur), caractériser le comportement asymptotique de cet estimateur. Déterminer une fonction $f(N)$ telle que $f(N)\hat{p}$ converge vers une loi normale (justifier votre réponse).

(6) Nous supposons maintenant que la probabilité est spécifique à chaque y_i , les variables aléatoires ne sont plus identiquement et indépendamment distribuées, seulement indépendamment distribuées. Chaque probabilité p_i est déterminée par un ensemble de variables exogènes et de paramètres :

$$p_i = p(X_i, \beta)$$

On cherche maintenant à estimer le vecteur de paramètres β . Écrire la log-vraisemblance.

(7) Calculer le score montrer qu'il est d'espérance nulle.

(8) Calculer la matrice hessienne de la log-vraisemblance. Donner une expression simple de son espérance en exploitant les propriétés de la loi de Bernoulli. Dans quel cadre cette expression

peut-elle être utilisée ?

(9) Afin d'explicitier la fonction p qui détermine la probabilité que y_i soit égal à 1, on postule un modèle à variable latente. On définit la variable latente z_i par

$$z_i = X_i\beta + u_i$$

où u_i est une variable aléatoire identiquement et indépendamment distribuée d'espérance nulle, X_i est un vecteur $1 \times K$ de variables exogènes et β un vecteur $K \times 1$ de paramètres. On note F la fonction de répartition de u_i . On postule alors :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } z_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la forme de la fonction $p(X_i, \beta)$.

(10) Dans la suite on suppose que u_i suit une loi logistique. Écrire la log-vraisemblance du modèle, en exploitant les propriétés de la loi logistique pour simplifier son expression.

(11) Calculer la matrice hessienne et montrer que celle-ci est définie négative. Quelles sont les conséquences ?

(12) Comment estimer le vecteur de paramètre β ?