Économétrie des Variables Qualitatives

Université du Mans (Examen, L3)

Lundi 10 juin 2024

(1) Soit un échantillon de variables dichotomiques $(y_1, \dots, y_N)$ identiquement et indépendament distribués selon une loi de Bernouilli de paramètre p. Chaque y vaut 1 avec probabilité p ou 0 avec probabilité $(1-p)$. *Calculer* l'espérance et la variance de y.

(2) Écrire la fonction de probabilité de y.

(3) Écrire la fonction de log-vraisemblance.

(4) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p.

(5) Calculer la variance de cet estimateur (à partir de l'expression de l'estimateur), caractériser le comportement asymptotique de cet estimateur. Déterminer la fonction $f(N)$ telle que $f(N)\hat{p}$ converge vers une loi normale (justifier votre réponse).

(6) Nous supposons maintenant que la probabilité est spécifique à chaque y_i, les variables aléatoires ne sont plus identiquement et indépendament distribuées, seulement indépendament distribuées. Chaque probabilité p_i est déterminée par un ensemble de variables exogènes et de paramètres :

$$p_i = p(X_i, \beta)$$

On cherche maintenant à estimer le vecteur de paramètres β. Écrire la log-vraisemblance.

(7) Calculer le score montrer qu'il est d'espérance nulle.

(8) Calculer la matrice hessienne de la log-vraisemblance. Donner une expression simple de son espérance en exploitant les propriétés de la loi de Bernouilli. Dans quel cadre cette expression peut-elle être utilisée ?

(9) Afin d'expliciter la fonction p qui détermine la probabilité que y_i soit égal à 1, on postule un modèle à variable latente. On définit la variable latente z_i par

$$z_i = X_i\beta + u_i$$

où u_i est une variable aléatoire identiquement et indépendament distribuée d'espérance nulle, X_i est un vecteur $1 \times K$ de variables exogènes et β un vecteur $K \times 1$ de paramètres. On note F la fonction de répartition de u_i. On postule alors :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } z_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la forme de la fonction $p(X_i, \beta)$.

(10) Dans la suite on supposera que u_i suit une loi logistique, dont la fonction de répartition est :

$$F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

Montrer que la densité de probabilité associée est :

$$f(t) = F(t)\,(1 - F(t))$$

(11) Écrire la log-vraisemblance du modèle, en exploitant les propriétés de la loi logistique pour simplifier son expression.

(12) Calculer la matrice hessienne et montrer que celle-ci est définie négative. Quelles sont les conséquences ?

(13) Comment estimer le vecteur de paramètre β ?