Exercice VIII

On considère un marché en concurrence parfaite où la demande exprimée est

$$D(p) = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{avec} \quad 0<\alpha<1$$

Par ailleurs la fonction de coût des firmes est

$$C(q) = c \times q$$

où $c>0$.

Le profit est donné par

$$\Pi(\bar{p}) = \bar{p}\, D(\bar{p}) - c\, D(\bar{p})$$

si le prix est $\bar{p}>0$. En substituant la fonction de demande, il vient

$$\Pi(\bar{p}) = \bar{p}\left(\frac{\alpha}{\bar{p}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - c\left(\frac{\alpha}{\bar{p}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Pi(\bar{p}) = (\bar{p}-c)\left(\frac{\alpha}{\bar{p}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Pi(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}(\bar{p}-c)\,\bar{p}^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

Si le prix est $\bar{p}>0$, le surplus des consommateurs est :

$$S(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\bar{p}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} dp$$

$$\Leftrightarrow \quad S(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_{\bar{p}}^{\infty} p^{\frac{1}{\alpha-1}} \, dp$$

$$\Leftrightarrow \quad S(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha-1}+1} \lim_{x \to \infty} \left[p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]_{\bar{p}}^{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S(\bar{p}) = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot (1-\alpha) \cdot \bar{p}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

Le bien être sociale est

$$W(p) = S(p) + \pi(p)$$

$$\Leftrightarrow \quad W(p) = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) \, p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} (p-c) \, p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Pour obtenir le prix socialement optimal, nous allons chercher le prix tel que la dérivée du bien être (par rapport au prix) est nulle.

La dérivée du surplus des consommateurs est :

$$S'(p) = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) \frac{\alpha}{\alpha - 1} \, p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad S'(p) = -\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \, p^{\frac{1}{\alpha-1}} < 0$$

une augmentation du prix est toujours défavorable aux consommateurs.

La dérivée du profit est :

$$\pi'(p) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \, p^{\frac{1}{\alpha-1}} + (p-c) \frac{1}{\alpha-1} \, p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On a donc :

$$W'(p) = -(p-c) \frac{1}{1-\alpha} \, p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Le prix optimal doit satisfaire

$$W'(p^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p^* = c$$

A l'optimum social le prix doit être égal au coût marginale. Il s'agit bien du prix qui maximise le bien être car $p < c \Leftrightarrow W'(p) > 0$

Exercice IX

Pour un prix $\bar{p}$ le surplus du consommateur est

$$S(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} \max\{\frac{a-p}{2}, 0\} dp$$

$$\Leftrightarrow \quad S(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{a} \frac{a-p}{2} dp$$

$$\Leftrightarrow \quad S(\bar{p}) = \frac{a(a-\bar{p})}{2} - \frac{1}{4}\left[p^2\right]_{\bar{p}}^{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad S(\bar{p}) = \frac{(a-\bar{p})^2}{4}$$

Pour le même prix $\bar{p}$, le surplus des firmes est

$$\Pi(\bar{p}) = \bar{p}D(\bar{p}) - F - c.D(\bar{p})$$

$$\Leftrightarrow \quad \Pi(\bar{p}) = \frac{(\bar{p}-c)(a-\bar{p})}{2} - F$$

Ainsi, le bien être est :

$$W(p) = \frac{(a-p)^2}{4} + \frac{(p-c)(a-p)}{2} - F$$

Le prix socialement optimal doit vérifier

$$W'(p^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2(a-p)}{4} + \frac{a-p-(p-c)}{2} = 0$$

Notons que le coût fixe n'intervient pas dans le calcul du prix optimal. On a encore en simplifiant :

$$\frac{c-p^*}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p^* = c}$$

On maximise le bien être social lorsque le prix est égal au coût marginal.

$\boxed{\text{MAIS}}$ Pour ~~ce~~ prix, le profit de la firme serait négatif

$$\Pi(p^*) = -F$$

et donc la firme déciderait de ne pas rentrer sur le marché.

L'état pourrait intervenir pour subventionner la firme en payant le coût fixe (tout en imposant la tarification au coût marginal). Mais cette solution n'est pas forcément désirable...

Une autre solution serait de proposer une tarification non linéaire de façon à ce que la firme puisse absorber le coût fixe. On reviendra sur ce type de tarification plus loin dans le cours.

On peut aussi maximiser le bien être social sous une contrainte de non négativité du profit :

$$\tilde{p} = \arg\max_{\{p\}} W(p) \quad \underline{sc} \quad \Pi(p) \geq 0$$

On parle alors de politique de "second best". Comme le bien être est une fonction monotone décroissante du prix lorsque celui-ci est supérieur à c :

$$W'(p) = \frac{c-p}{2} < 0 \quad \text{si } p > c$$

On cherche le prix le plus petit tel que le profit est nul, ou, de façon équivalente la quantité la plus grande telle que le profit est nul.

Cherchons, s'ils existent, les prix tels que le profit est nul :

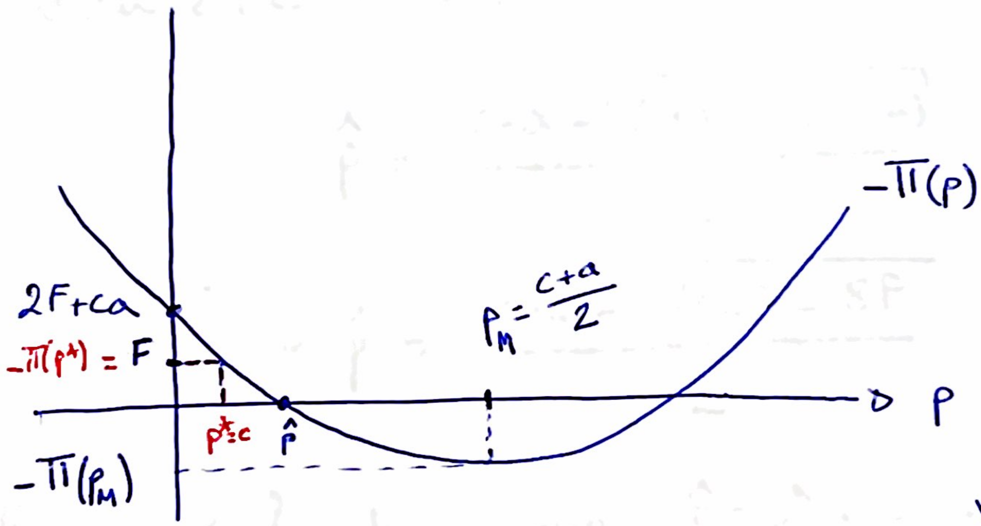
$$\Pi(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-c)\frac{a-p}{2} - F = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{p^2 - (c+a)p + 2F + ca}_{-\Pi(p)} = 0$$

$-\Pi(0) = 2F + ca > 0$

$-\Pi'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{c+a}{2} > c$



Le prix qui annule la dérivée du profit et celui qui maximise le profit (ou minimise l'opposé du profit). On verra plus loin qu'il s'agit du prix que choisirait une entreprise en situation de monopole.

Pour qu'il existe un prix tel que le profit soit nul il faut que $-\Pi(p_M) \leq 0$:

$$-\Pi\left(\frac{c+a}{2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

Il faut que le coût fixe ne soit pas trop important, c'est-à-dire tel qu'une entreprise en situation de monopole sur ce marché ne réalise pas un profit négatif (dans ce cas même un monopole choisirait de ne pas participer au marché).

Si $F < \frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{2}\right)^2$ il existe deux prix qui annulent le profit. On choisit le prix le plus proche de 0, pour maximiser le bien être social :

$$\hat{p} = \frac{c+a-\sqrt{(c+a)^2-4(2F+ca)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{c+a-\sqrt{(c-a)^2-8F}}{2}$$

On vérifie bien que $\hat{p} = p^* = c$ si et seulement si $F=0$ (pas de coût fixe) [Rmq $\sqrt{(c-a)^2} = a-c$ car par hypothèse $a>c$] et que $\hat{p}$ augmente avec F.

Exercice X

Le surplus du consommateur est donné par :

$$S(p) = \int_p^{\infty} \max\left\{\frac{\log\gamma}{\gamma} - \frac{\log x}{\gamma}, 0\right\} dx$$

$$\Leftrightarrow \quad S(p) = \frac{1}{\gamma} \int_p^{\gamma} (\log \gamma - \log x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad S(p) = \frac{\gamma - p}{\gamma} \log \gamma - \frac{1}{\gamma} (\gamma \log \gamma - \gamma - p \log p + p)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S(p) = -\frac{p}{\gamma} \log \gamma + \frac{\gamma + (p \log p - p)}{\gamma}}$$

On vérifie que le surplus des consommateurs est bien monotone décroissant par rapport au prix :

$$S'(p) = -\frac{\log \gamma}{\gamma} + \frac{\log p}{\gamma} < 0$$

$$= +\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{p}{\gamma}\right) \qquad (\text{car } p < \gamma)$$

Par ailleurs, le surplus de la firme (le profit) est :

$$\Pi(p) = (p - c) \frac{\log \gamma - \log p}{\gamma}$$

et sa dérivée :

$$\Pi'(p) = \frac{\log \gamma - \log p}{\gamma} - \frac{p - c}{p} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

Le bien être est donc

$$W(p) = S(p) + \pi(p)$$

et sa dérivée :

$$W'(p) = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{p - c}{p}$$

Le prix qui annule la dérivée du bien être est $p^* = c$ (le coût marginal). Il s'agit bien du prix qui maximise le bien être car $W'(p) > 0 \iff p < p^*$.

Exercice XI

Nous avons déjà rencontré cette fonction de demande linéaire (voir l'exercice IX), le surplus des consommateurs et donc

$$S(p) = \frac{(a-p)^2}{4} \quad \text{ou} \quad S(q) = q^2$$

La fonction de coût et quadratique

$$C(q) = cq + dq^2$$

Le profit et donc donné par

$$\Pi(p) = p D(p) - C(D(p))$$

$$\iff \Pi(p) = (p-c)\frac{a-p}{2} - d\left(\frac{a-p}{2}\right)^2$$

en supposant que $p < a$ (autrement la demande exprimée par les consommateurs est nulle)

On peut aussi exprimer le profit en fonction de la quantité de bien :

$$\Pi(q) = p(q)q - cq - dq^2$$

$$\Leftrightarrow \Pi(q) = (a-2q)q - cq - dq^2$$

$$\Leftrightarrow \Pi(q) = (a-c)q - 2q^2 - dq^2$$

Ainsi le bien être, comme une fonct° de q est

$$W(q) = q^2 + (a-c)q - 2q^2 - dq^2$$

$$\Leftrightarrow W(q) = (a-c)q - (1+d)q^2$$

La quantité, q^*, qui maximise le bien être social doit annuler la dérivée du bien être

$$W'(q^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1+d)q^* = a-c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q^* = \frac{a-c}{2(1+d)}}$$

Le prix socialement optimal est alors

$$p^* = a - 2q^*$$

$$\Leftrightarrow p^* = a - \frac{a-c}{1+d}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p^* = \frac{c+ad}{1+d}}$$

On vérifie bien qu'à l'optimum social le prix est égal au coût marginal :

$$Cm(q) = c + 2dq$$

$$\Rightarrow Cm(q^*) = c + 2d\frac{a-c}{2(1+d)}$$

$$\Leftrightarrow Cm(q^*) = \frac{\cancel{2}c(1+d) + \cancel{2}d(a-c)}{\cancel{2}(1+d)}$$

$$\Leftrightarrow Cm(q^*) = \frac{c+da}{1+d} = p^*$$