Exercice V

(1) Comme la fonction de production est bijective, elle est monotone croissante, nous pouvons l'inverser :

$$q = l^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad l = q^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(puisque les variables sont positives)}$$

En l'absence de coût fixe, la fonction de coût de l'entreprise est donc donnée par :

$$C(q) = w \cdot \sqrt{q}$$

Le coût moyen est :

$$C_M(q) = \frac{w}{\sqrt{q}}$$

Le coût marginal est :

$$C_m(q) = C'(q) = \frac{w}{2} q^{\frac{1}{2}-1} = \frac{w}{2\sqrt{q}}$$

Le coût moyen et le coût marginal convergent vers 0 quand q tend vers l'infini. Pour tout $q < \infty$ on a $C_M(q) > C_m(q)$.

(2) Pour conclure sur la présence ou non d'économies d'échelle, calculons $E(q) = C(\mu q) - \mu C(q)$ et déterminons son signe pour $\mu > 1$.

$$E(q) = w\sqrt{\mu q} - w\mu\sqrt{q}$$

$$\Leftrightarrow E(q) = (\sqrt{\mu} - \mu) w\sqrt{q} < 0 \quad \forall \mu > 1 \text{ et } \forall q > 0$$

Nous avons donc bien ici des économies d'echelle. Il est moins coûteux d'augmenter le niveau de production d'une entreprise que de répliquer les unité de production (afin de produire la même quantité.

Exercice VI

La fonction de coût de l'entreprise est le coût minimal dont elle doit s'acquitter afin de produire une quantité q. On obtient la fonction de coût en minimisant les coûts sous la contrainte technologique : étant donnés les prix des facteurs, l'entreprise doit choisir le mélange optimal des facteurs qui lui permet de produire une quantité arbitraire de bien :

$$\min_{\{l, x\}} \; wl + px$$
$$\text{sc} \quad q = \rho^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \min_{\{x\}} \; wq^2x^{-1} + px \qquad l = q^2x^{-1}$$

en substituant la contrainte technologique dans la fonction objectif (on exprime l en fonction de x et q). La CPO st :

$$p - wq^2x^{-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = q\sqrt{\frac{w}{p}}}$$

la demande optimale de matière première. Celle-ci st décroissante par rapport au prix de la matière première et croissante par rapport au prix du travail (substitution entre les facteurs de production). On a aussi :

$$l = q^2\left(q\sqrt{\frac{w}{p}}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = q\sqrt{\frac{p}{w}}}$$

La fonction de coût st donc

$$C(q) = wq\sqrt{\frac{p}{w}} + pq\sqrt{\frac{w}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \quad C(q) = q\cdot\left(w\sqrt{\frac{p}{w}} + p\sqrt{\frac{w}{p}}\right)$$

$$\boxed{C(q) = 2\sqrt{wp} \times q}$$

elle est linéaire par rapport aux quantités. On a donc

$$C_M(q) = C_m(q) = 2\sqrt{w.p}$$

(2) Puisque la fonction de coût est linéaire, il n'y a pas d'économies d'échelle (ou déséconomies d'échelle) : les rendements sont constants.

$$E(q) = C(\mu q) - \mu C(q)$$
$$= 2\sqrt{wp}\,\mu q - \mu 2\sqrt{wp}\,q$$
$$= 0$$

Exercice VII

(1) La fonction réciproque de la fonction de production est :

$$l = q^2$$

La fonction de coût de l'entreprise est donc

$$C(q) = F + wq^2$$

Le coût moyen est :

$$C_M(q) = \frac{F + wq^2}{q}$$

$$\Leftrightarrow C_M(q) = \frac{F}{q} + wq$$

En étudiant le signe de la dérivée du coût moyen, on montre que cette fonction est décroissante pour $q < \sqrt{\frac{F}{w}}$ puis croissante pour les plus grandes valeurs de q.

Le coût marginal est

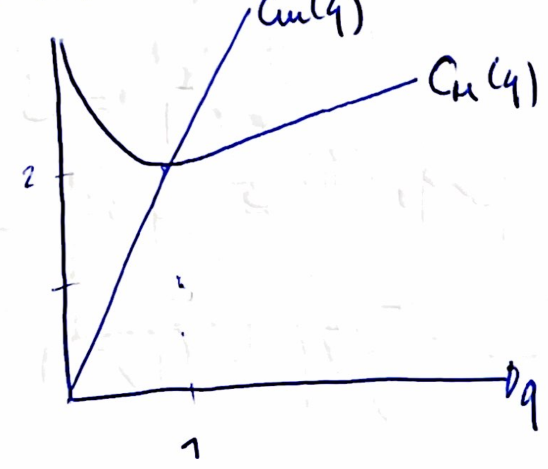
$$C_m(q) = 2wq$$

est une fonction linéaire croissante.

On vérifie que $\bar{q}$ tel que $C_m(\bar{q}) = C_M(\bar{q})$ est

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{F}{w}}$$

↳ les deux fonctions se rencontrent, comme attendu au minimum du coût moyen.



(3) On a

$$
\begin{aligned}
E(q) &= C(\mu q) - \mu C(q) \\
&= F + w\mu^2 q^2 - \mu F - w\mu q \\
&= (1-\mu)F + w(\mu^2 - \mu)q^2 \\
&= (1-\mu)F + w(\mu - 1)\mu q^2
\end{aligned}
$$

$\forall \mu > 1$ le premier terme, lié au coût fixe, est nécessairement négatif $\rightarrow$ Il y a des économies d'échelle par rapport au coût fixe. Le second terme, lié au coût variable, est ici nécessairement négatif $\rightarrow$ Il y a des désécomies d'échelle par rapport au coût variable. Au total, il y a des économies d'échelle si et seulement si

$$
\begin{aligned}
& E(q) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\mu)F + w(\mu-1)\mu q^2 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & w(\mu-1)\mu q^2 < (\mu-1)F \\
\Leftrightarrow\ & w\mu q^2 < F \qquad \text{car } \mu > 1 \\
\Leftrightarrow\ & q^2 < \frac{F}{w\mu} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{q^{*} < \sqrt{\frac{F}{w\mu}}}
\end{aligned}
$$