Exercice I

$$u(x) = x^\alpha \quad \text{avec} \quad 0<\alpha<1$$

quantité de bien

on note p le prix de chaque unité de bien.

(1) On obtient la fonction de demande du ménage en maximisant son utilité sous sa contrainte budgétaire (saturée) :

l'utilité indirecte retirée de la conso d'autres biens

$$\underset{\{x\}}{\text{Max}} \; M + x^\alpha$$

$$\text{sc} \quad M + px = R$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{\{x\}}{\text{Max}} \; R - px + x^\alpha$$

<u>CNO</u> $\quad -p + \alpha x^{\alpha-1} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv D(p)$$

La demande est bien décroissante par rapport au prix.

(2) On définit l'élasticité comme :

$$\epsilon(p) = - D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$$

On a :

$$\epsilon(p) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{p^2} \cdot \frac{p}{D(p)} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon(p) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{p} \cdot \frac{(\alpha/p)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}}{(\alpha/p)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon(p) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{p} \cdot \frac{p}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon(p) = \frac{1}{1-\alpha} > 0 \quad \forall\, p$$

La demande st d'autant plus élastique au prix que α st proche de 1. Cette propriété st intuitive car, dans le cas d'une fonction d'utilité Cobb-Douglas, α st aussi l'élasticité de l'utilité par rapport aux quantités (le bien être du ménage st d'autant plus sensible aux variations de quantités que α st proche de 1).

(3) On définit le surplus comme :

$$\Psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p)\, dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_{\bar{p}}^{\infty} p^{\frac{1}{\alpha-1}}\, dp \qquad 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \left[p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]_{\bar{p}}^{\infty}$$

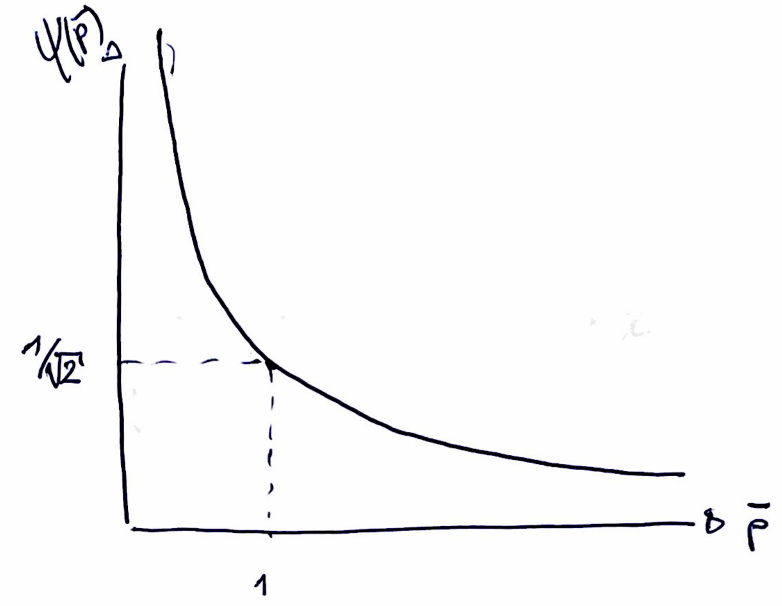
$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\alpha-1}{\alpha} \Big(\underbrace{\lim_{p \to \infty} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}_{=0 \text{ car } \alpha<1} - \bar{p}^{\frac{1}{\alpha-1}} \Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Psi(\bar{p}) = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}\, \bar{p}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

Il s'agit d'une fonction monotone décroissante (comme attendu). Dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\Psi(\bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \bar{p}^{-1}$$

une hyperbole, au facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ près.



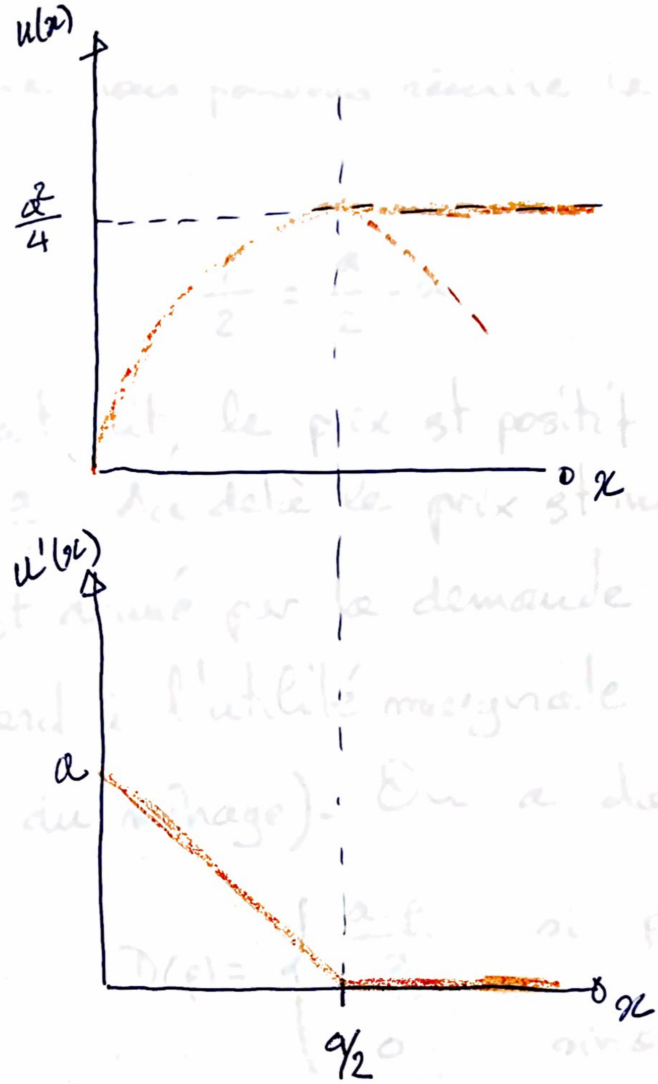
Exercice II

(1) L'utilité marginale doit être positive (et décroissante).
Si on considère la partie de la fonction d'utilité qui dépend de la quantité x, on a :

$$u'(x) = a - x + x(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x) = a - 2x$$

l'utilité marginale est positive si et seulement si $x < \frac{a}{2}$.
C'est cette contrainte qui justifie la définition de la fonction d'utilité en 2 parties. La fonction d'utilité marginale est décroissante puis nulle $\forall x \geq \frac{a}{2}$.



(2) Posons le programme du consommateur qui nous permettra de déterminer la fonction de demande :

fonctions indicatrices

$$\max_{\{x\}} \; M + x(a-x)\mathbb{1}^{(x)}_{\{x \leq \frac{a}{2}\}} + \frac{a^2}{4}\mathbb{1}^{(x)}_{\{x > \frac{a}{2}\}}$$

$$\underline{sc} \quad M + px = R$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{\{x\}} \; R - px + x(a-x)\mathbb{1}^{(x)}_{\{x \leq \frac{a}{2}\}} + \frac{a^2}{4}\mathbb{1}^{(x)}_{\{x > \frac{a}{2}\}}$$

<u>CNO</u> $\quad -p + a - 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{a-p}{2}}$$

Notons que nous pouvons réécrire la CNO comme

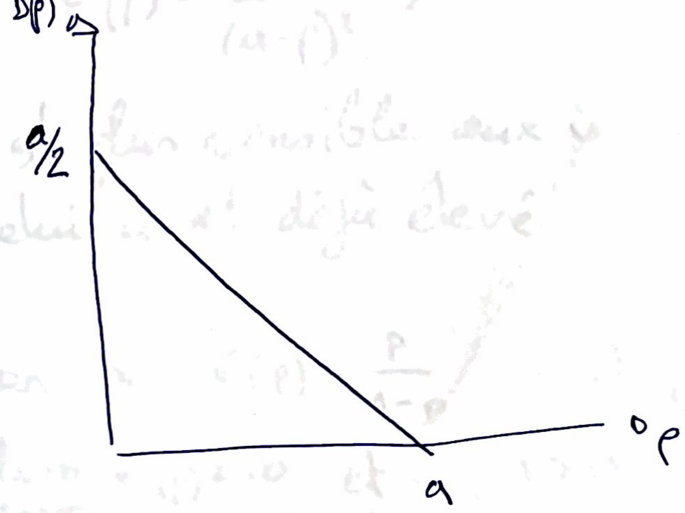
$$\frac{p}{2} = \frac{a}{2} - x$$

autrement dit, le prix est positif si et seulement si $x < \frac{a}{2}$. Au delà le prix est nul, on sait qu'il est donné par la demande inverse qui correspond à l'utilité marginale (la disposition à payer du ménage). On a donc :

$$D(p) = \begin{cases} \frac{a-p}{2} & \text{si } p \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car les ménages ne peuvent exprimer une demande négative. On peut alternativement, de façon plus synthétique écrire :

$$D(p) = \max\left\{\frac{a-p}{2}, 0\right\}$$



le paramètre a est la valeur maximale de l'utilité marginale, le ménage ne sera jamais disposé à payer plus que a par unité de bien. Au delà la demande exprimée doit être nulle.

(3) Calculons l'élasticité de la demande

$$\epsilon(p) = -D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\frac{a-p}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon(p) = \frac{p}{a-p}$$

On remarque que l'élasticité est monotone croissante par rapport au prix

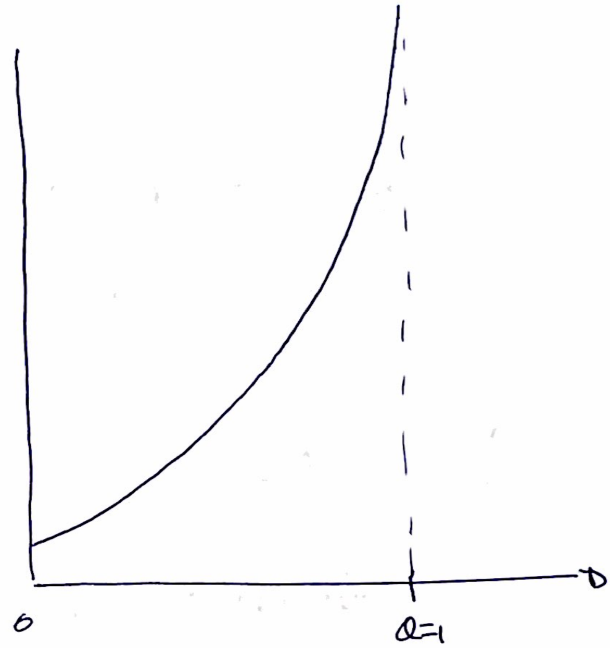
$$\epsilon'(p) = \frac{a-p-p(-1)}{(a-p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon'(p) = \frac{a}{(a-p)^2} > 0$$

Le ménage est plus sensible aux variations de prix quand celui-ci est déjà élevé.

Si $a=1$, on a $\epsilon(p) = \frac{p}{1-p}$, $\epsilon'(p) = \frac{1}{(1-p)^2}$, $\epsilon(0) = 0$

$\epsilon'(0) = 1$, $\lim\limits_{p \to a=1} \epsilon'(p) = \infty$ et $\epsilon''(p) > 0$



La fonction d'élasticité est convexe, avec une asymptote en $p=1$ (a). L'élasticité tend vers l'infini quand p tend vers 1 (a) et elle est toujours supérieure à 1.

(4) Le surplus est

$$\psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p)\,dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} \max\left\{\frac{a-p}{2}, 0\right\} dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{a} \frac{a-p}{2}\,dp \qquad \text{car } \forall p>a \text{ on a } D(p)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar{p}) = \frac{a}{2}\int_{\bar{p}}^{a} dp - \frac{1}{2}\int_{\bar{p}}^{a} p\,dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar{p}) = \frac{a}{2}(a-\bar{p}) - \frac{1}{4}\left[p^2\right]_{\bar{p}}^{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar{p}) = a\left(\frac{a-\bar{p}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(a^2-\bar{p}^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar{p}) = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}\bar{p} + \frac{1}{4}\bar{p}^2$$

Notons que

$$\psi'(\bar{p}) = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\bar{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi'(\bar{p}) = -\frac{a-\bar{p}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi'(\bar{p}) = -D(\bar{p}) < 0$$

car la demande est positive. Le surplus décroît en fonction du prix.

Exercice III

(1) Le programme du ménage est

$$\max_{\{x\}} M + \beta \log(1+x)$$
$$\text{sc} \quad M + px = R$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{\{x\}} R - px + \beta \log(1+x)$$

CNO $\quad -p + \frac{\beta}{1+x} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad p = \frac{\beta}{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad 1+x = \frac{\beta}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\beta}{p} - 1 \equiv D(p)$$

La demande est bien décroissante par rapport au prix p. On note que pour une valeur donnée de $\beta > 0$, quand p s'accroît on aura forcément à partir d'un certain niveau de prix $\beta/p < 1$. Afin d'assurer la non négativité de la demande on pose :

$$D(p) = \max\left\{\frac{\beta - p}{p}, 0\right\}$$

β est le prix maximum de l'unité de bien pour lequel le ménage accepte de rentrer sur le marché. Ceteris paribus, une augmentation de β induit une augmentation de la demande.

(2) Calculons l'élasticité de la demande en supposant que $p < \beta$ (sinon la demande est nulle et donc inélastique).

$$\epsilon(p) = -D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$$

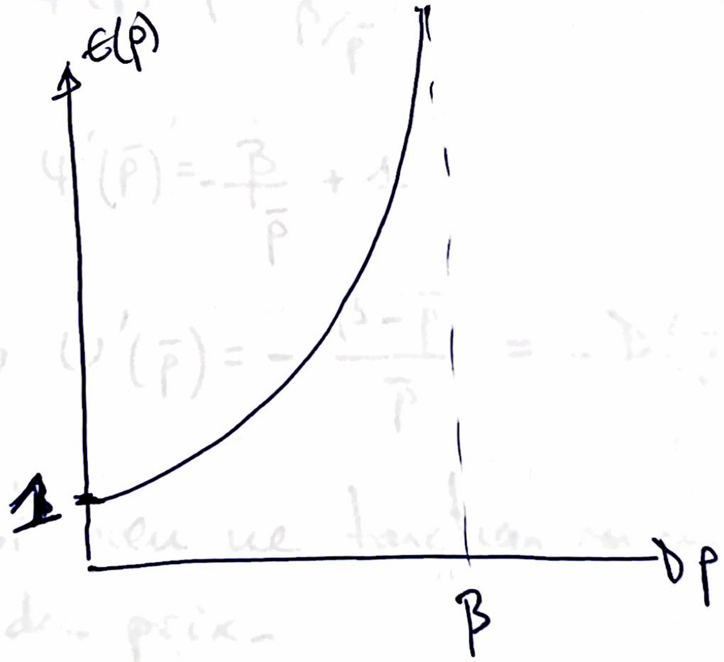
$$\Leftrightarrow \epsilon(p) = \frac{\beta}{p^2} \cdot \frac{p}{\frac{\beta - p}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\epsilon(p) = \frac{\beta}{\beta - p}}$$

On note que l'élasticité est d'autant plus grande que le prix se rapproche de β :

$$\epsilon'(p) = \frac{\beta}{(\beta-p)^2} > 0$$

et on a aussi $\epsilon''(p) > 0$. La courbe d'élasticité est croissante convexe et tend vers l'infini



(3) Calculons le surplus du ménage :

$$\psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p)\, dp$$

$$\psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\beta} \frac{\beta - p}{p}\, dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\beta} \frac{\beta}{p}\, dp - \int_{\bar{p}}^{\beta} dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \beta \int_{\bar{p}}^{\beta} \frac{dp}{p} - (\beta - \bar{p})$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \beta \left[\log p \right]_{\bar{p}}^{\beta} - (\beta - \bar{p})$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \beta \left(\log \beta - \log \bar{p} \right) - (\beta - \bar{p})$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(\bar{p}) = \beta \log \beta/\bar{p} - (\beta - \bar{p})$$

On a

$$\Psi'(\bar{p}) = \beta \, \frac{-\beta/\bar{p}^2}{\beta/\bar{p}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi'(\bar{p}) = -\frac{\beta}{\bar{p}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi'(\bar{p}) = -\frac{\beta - \bar{p}}{\bar{p}} = -D(\bar{p}) < 0$$

Le surplus est bien une fonction monotone décroissante du prix.

Exercice IV

(1) Le programme du ménage est

$$\max_{\{x\}} M + e^{-\gamma x}$$
$$\text{sc} \quad M + px = R$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{\{x\}} R - px - e^{-\gamma x}$$

La condition nécessaire d'optimalité associée est

$$-p + \gamma e^{-\gamma x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{\gamma} \log \frac{p}{\gamma}$$

On note que la quantité demandée est positive si et seulement si $p < \gamma$. On définit donc la fonction de demande comme

$$D(p) = \max\left\{-\frac{1}{\gamma}\log\frac{p}{\gamma}, 0\right\}$$

L'utilité marginale est $u'(x) = \gamma e^{-\gamma x}$, il s'agit d'une fonction monotone décroissante continue telle que $\lim_{x \to \infty} u'(x) = 0$ et $u'(0) = \gamma$. Le paramètre γ est une borne supérieure sur la disposition à payer (une unité de bien) du ménage.

(2) Pour les valeurs de p plus petites que γ, l'élasticité prix de la demande est définie par :

$$\epsilon(p) = -D'(p)\frac{p}{D(p)}$$

$$D'(p) = -\frac{\gamma}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon(p) = -\frac{\gamma^2}{\log\frac{p}{\gamma}} > 0 \quad (\text{si } p < \gamma)$$

On a aussi :

$$\epsilon'(p) = \gamma^2 \frac{1/p}{\log(p/\gamma)^2} > 0$$

L'élasticité est donc d'autant plus grande que le prix est proche de la disposition maximale à payer une unité de bien.

(3) Le surplus du ménage est défini par

$$\psi(\bar p) = \int_{\bar p}^{\infty} D(p)\, dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar p) = -\frac{1}{\gamma}\int_{\bar p}^{\gamma} \log \frac{p}{\gamma}\, dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar p) = -\frac{1}{\gamma}\left(\int_{\bar p}^{\gamma} \log p \, dp - \int_{\bar p}^{\gamma} \log \gamma \, dp \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar p) = \frac{\log \gamma}{\gamma}(\gamma - \bar p) - \frac{1}{\gamma}\int_{\bar p}^{\gamma} \log p \, dp$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar p) = \frac{\log \gamma}{\gamma}(\gamma - \bar p) - \frac{1}{\gamma}\Big[p \log p - p \Big]_{\bar p}^{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar p) = \frac{\log \gamma}{\gamma}(\gamma - \bar p) - \frac{1}{\gamma}\left(\gamma \log \gamma - \gamma - \bar p \log \bar p + \bar p \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi(\bar p) = 1 + \bar p + \bar p \log \bar p \qquad \underline{\text{si } \gamma = 1}$$

$(x \log x - x)' = \log x + \frac{x}{x} - 1 = \log x$ ✓

IPP $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ en posant $\begin{cases} u = \log x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ et $v = x$

On a $\psi(\bar p)' = + \log \bar p \equiv - D(\bar p) < 0$. Le surplus est une fonction monotone décroissante du prix. Il s'agit d'une fonction convexe puisque

$$\psi''(\bar p) = \frac{1}{\bar p} > 0$$