

# MICROÉCONOMIE

(L2, LE MANS)

Éléments de correction

Seconde session — 12 juin 2026

**Exercice 1.** On considère les préférences :

$$u(q) = \beta \log(1 + q)$$

avec  $\beta > 0$ .

(1) L'utilité marginale est :

$$u'(q) = \frac{\beta}{1 + q}$$

Elle est strictement positive pour tout  $q \geq 0$  : la satisfaction du consommateur augmente toujours avec la quantité consommée (le bien n'est jamais saturé). On a par ailleurs :

$$u''(q) = -\frac{\beta}{(1 + q)^2} < 0$$

L'utilité marginale est décroissante. La satisfaction augmente donc avec la consommation, mais à un rythme de plus en plus faible : c'est le principe d'utilité marginale décroissante.

(2) Le consommateur dispose d'un revenu  $R > 0$  et le prix du bien est  $p > 0$ . Il maximise son utilité sous la contrainte budgétaire :

$$\max_{\{q\}} M + \beta \log(1 + q)$$

$$\text{s.c. } M + pq = R$$

où  $M$  représente l'utilité retirée de la consommation des autres biens. En substituant la contrainte dans l'objectif, on obtient le programme équivalent :

$$\max_{\{q\}} R - pq + \beta \log(1 + q)$$

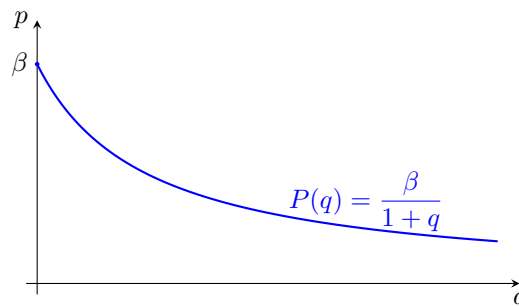
La condition du premier ordre est :

$$p = \frac{\beta}{1 + q}$$

c'est-à-dire que le consommateur égalise son utilité marginale au prix. Il s'agit de la fonction de demande inverse :

$$P(q) = \frac{\beta}{1 + q}$$

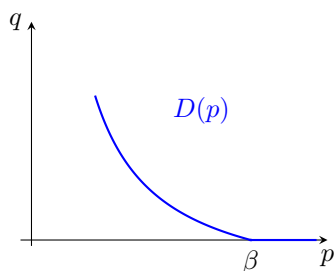
Dans le plan  $(q, p)$ , c'est une hyperbole décroissante et convexe, qui part de  $P(0) = \beta$  et tend vers 0 lorsque  $q \rightarrow +\infty$ .



(3) En inversant la demande inverse,  $p(1 + q) = \beta$ , on obtient  $q = \frac{\beta}{p} - 1$ . Cette quantité n'est positive que si  $p \leq \beta$ . La demande (non négative) s'écrit donc :

$$D(p) = \max \left\{ \frac{\beta}{p} - 1, 0 \right\}$$

Dans le plan  $(p, q)$ , c'est une courbe décroissante et convexe, qui vaut 0 pour  $p \geq \beta$ , et qui diverge lorsque  $p \rightarrow 0$ .

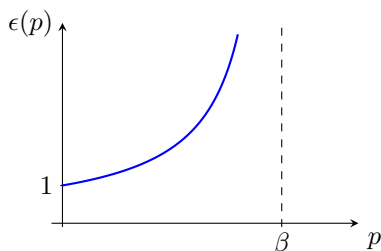


(4) Lorsque la consommation est nulle, l'utilité marginale vaut  $u'(0) = \beta$ . Le paramètre  $\beta$  est donc la disponibilité maximale à payer du consommateur pour la première unité de bien : aucun consommateur n'accepte de payer un prix supérieur à  $\beta$ , ce qui se lit directement sur la demande, nulle dès que  $p \geq \beta$ .

(5) Sur la zone où la demande est strictement positive ( $p < \beta$ ), on a  $D(p) = \frac{\beta}{p} - 1$  et  $D'(p) = -\frac{\beta}{p^2}$ . Par convention, on définit l'élasticité prix avec un signe moins, de manière à la rendre positive (la demande étant décroissante) :

$$\begin{aligned} \epsilon(p) &= -\frac{p}{D(p)} D'(p) = -\frac{p}{\frac{\beta}{p} - 1} \left( -\frac{\beta}{p^2} \right) \\ &= \frac{\frac{\beta}{p}}{\frac{\beta}{p} - 1} = \frac{\beta}{\beta - p} \end{aligned}$$

Puisque  $0 < \beta - p < \beta$  sur cette zone,  $\epsilon(p) = \frac{\beta}{\beta - p} > 1$  : la demande est partout *élastique*. L'élasticité tend vers 1 lorsque  $p \rightarrow 0$  et vers  $+\infty$  lorsque  $p \rightarrow \beta$  : plus le prix se rapproche de la disponibilité maximale à payer, plus la demande est sensible au prix.



**Exercice 2.** On reprend  $D(p) = \max \left\{ \frac{\beta}{p} - 1, 0 \right\}$  et la fonction de coût linéaire  $C(q) = cq$ , avec  $c > 0$

(le coût marginal et le coût moyen sont tous deux égaux à  $c$ ).

(1) Pour qu'un échange soit possible, il faut que la disponibilité maximale à payer des consommateurs dépasse le coût de production : on suppose donc  $\beta > c$ . Dans le cas contraire ( $\beta \leq c$ ) aucun consommateur n'accepte de payer un prix couvrant le coût marginal et le marché n'existe pas.

(2) À l'optimum social, le prix est égal au coût marginal :  $p^* = c$ . La quantité optimale s'obtient en substituant dans la demande :

$$q^* = \frac{\beta}{c} - 1$$

La fonction de coût étant linéaire, le profit des firmes est nul :

$$\Pi^* = (p^* - c)q^* = 0$$

Le surplus des consommateurs est :

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{p^*}^{+\infty} D(p) dp = \int_c^\beta \left( \frac{\beta}{p} - 1 \right) dp \\ &= \left[ \beta \log p - p \right]_c^\beta \\ &= \beta \log \frac{\beta}{c} - (\beta - c) \end{aligned}$$

(la borne supérieure est  $\beta$  puisque la demande est nulle au-delà). Le profit étant nul, le bien être social est :

$$W^* = S^* + \Pi^* = \beta \log \frac{\beta}{c} - (\beta - c)$$

(3) En situation de monopole, la firme choisit son prix pour maximiser son profit :

$$p^m = \arg \max_{\{p\}} p D(p) - c D(p)$$

La condition du premier ordre est :

$$\underbrace{D(p^m) + p^m D'(p^m)}_{\text{recette marginale}} = c D'(p^m)$$

c'est-à-dire l'égalisation de la recette marginale et du coût marginal. Si la recette marginale était supérieure (resp. inférieure) au coût marginal, vendre une unité supplémentaire rapporterait

plus (resp. coûterait plus) qu'elle ne coûte (resp. rapporte) : la firme aurait intérêt à baisser (resp. augmenter) son prix. L'optimum s'obtient donc nécessairement à l'égalité.

(4) Le profit du monopole, sur la zone  $p < \beta$ , s'écrit :

$$\Pi(p) = (p - c) \left( \frac{\beta}{p} - 1 \right) = \beta - p - \frac{c\beta}{p} + c$$

La condition du premier ordre  $\Pi'(p) = 0$  donne :

$$-1 + \frac{c\beta}{p^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^m = \sqrt{c\beta}$$

Le prix du monopole est la *moyenne géométrique* du coût marginal  $c$  et de la disponibilité maximale à payer  $\beta$ . Comme  $c < \beta$ , on a bien :

$$c = \sqrt{c \cdot c} < \sqrt{c\beta} = p^m < \sqrt{\beta \cdot \beta} = \beta$$

La quantité produite est :

$$q^m = \frac{\beta}{p^m} - 1 = \frac{\beta}{\sqrt{c\beta}} - 1 = \sqrt{\frac{\beta}{c}} - 1$$

Comme  $\frac{\beta}{c} > 1$ , on a  $\sqrt{\frac{\beta}{c}} < \frac{\beta}{c}$ , d'où :

$$q^m = \sqrt{\frac{\beta}{c}} - 1 < \frac{\beta}{c} - 1 = q^*$$

La quantité échangée est inférieure à l'optimum social.

(5) Le surplus des consommateurs sous monopole est :

$$\begin{aligned} S^m &= \int_{p^m}^{\beta} \left( \frac{\beta}{p} - 1 \right) dp = \beta \log \frac{\beta}{p^m} - (\beta - p^m) \\ &= \frac{\beta}{2} \log \frac{\beta}{c} - \beta + \sqrt{c\beta} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé  $\log \frac{\beta}{\sqrt{c\beta}} = \log \sqrt{\frac{\beta}{c}} = \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{c}$ . Le profit est :

$$\begin{aligned} \Pi^m &= (p^m - c)q^m = \left( \sqrt{c\beta} - c \right) \left( \sqrt{\frac{\beta}{c}} - 1 \right) \\ &= \beta - \sqrt{c\beta} - \sqrt{c\beta} + c = \left( \sqrt{\beta} - \sqrt{c} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

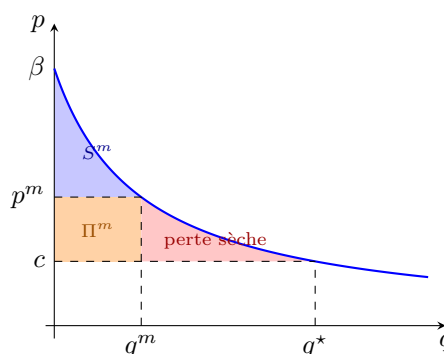
Le bien être social est :

$$\begin{aligned} W^m &= S^m + \Pi^m \\ &= \frac{\beta}{2} \log \frac{\beta}{c} + c - \sqrt{c\beta} \end{aligned}$$

En comparant à l'optimum social, la perte sèche s'écrit :

$$W^* - W^m = \frac{\beta}{2} \log \frac{\beta}{c} - \beta + \sqrt{c\beta} = S^m > 0$$

Cette quantité est strictement positive (c'est un surplus, intégrale d'une fonction positive). La présence du monopole réduit donc le bien être social : en restreignant les quantités pour vendre à un prix supérieur au coût marginal, la firme augmente son profit, mais le surplus des consommateurs diminue davantage. C'est en ce sens que le monopole est socialement problématique.



(6) L'indice de Lerner mesure le taux de marge relatif du monopole :

$$\mathcal{L} = \frac{p^m - c}{p^m} = 1 - \frac{c}{\sqrt{c\beta}} = 1 - \sqrt{\frac{c}{\beta}}$$

Or l'élasticité de la demande évaluée en  $p^m$  vaut :

$$\epsilon(p^m) = \frac{\beta}{\beta - p^m} = \frac{\beta}{\beta - \sqrt{c\beta}}$$

de sorte que :

$$\frac{1}{\epsilon(p^m)} = \frac{\beta - \sqrt{c\beta}}{\beta} = 1 - \sqrt{\frac{c}{\beta}} = \mathcal{L}$$

On retrouve la règle de tarification du monopole : le taux de marge est égal à l'inverse de l'élasticité prix de la demande. Plus la demande

est inélastique, plus le pouvoir de marché est important.

(7) Oui. Si le monopole est capable de pratiquer une discrimination parfaite par les prix, en facturant à chaque unité de bien un prix égal à la disponibilité à payer correspondante (lue sur la demande inverse  $P(q)$ ), alors il capte la totalité du surplus mais continue de servir le marché tant que la disponibilité à payer dépasse le coût marginal. Le dernier consommateur servi est celui pour lequel  $P(q) = c$ , c'est-à-dire  $q = q^*$ . La quantité échangée correspond alors à l'optimum social et la perte sèche disparaît : le bien être social retrouve son niveau optimal  $W^*$ , mais il est intégralement capté par la firme sous forme de profit.