

Surplus du consommateur

(4)

Nous avons vu en cours de façons de calculer le surplus des consommateurs :

(i) comme une fonction des quantités, en utilisant la fonction de demande inverse $P(q)$

(ii) comme une fonction des prix en utilisant la fonction de demande $D(p)$

NOTATIONS

+ $q \in \mathbb{R}^+$ la quantité de bien

+ $p \in \mathbb{R}^+$ le prix du bien

+ $D(p)$ la fonction de demande

+ $P(q)$ la fonction de demande inverse

REMARQUES

+ On a $P(D(p)) = p$

et $D(P(q)) = q$

car P et la fonction réciproque de D .

+ On suppose que $\lim_{q \rightarrow 0} P(q) = +\infty$ c'est-à-

dire que les consommateurs sont prêt à payer un prix infini s'ils n'ont rien.

Ce n'est pas toujours le cas, par exemple, si la fonction de demande

est linéaire alors la disposition maximale à payer est finie -

Supposons que la quantité de bien échangée sur le marché soit $\bar{q} > 0$ et que le prix soit $\bar{p}$. On a $\bar{q} = D(\bar{p})$ et $\bar{p} = I(\bar{q})$.

Le surplus des consommateurs peut se calculer comme

$$S(\bar{q}) = \int_0^{\bar{q}} I(q) dq - \bar{p}\bar{q} \quad (1)$$

ou

$$S(\bar{p}) = \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p) dp \quad (2)$$

Pour montrer l'équivalence entre les deux approches, nous partons de (1) et à l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties montrons que nous pouvons retrouver (2).

Si $q = D(p)$, alors $dq = D'(p) dp$, ainsi nous pouvons réécrire l'intégrale dans (1) comme

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{q}} I(q) dq &= \int_{\infty}^{\bar{p}} p D'(p) dp \\ &= - \int_{\bar{p}}^{\infty} p D'(p) dp \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale à droite on utilise une

Intégration par parties :

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \Leftrightarrow uv' &= (uv)' - u'v \\ \int uv' &= uv - \int u'v \end{aligned}$$

$$\int_{\bar{p}}^{\infty} p D'(p) dp = \lim_{p \rightarrow \infty} p D(p) - \bar{p} D(\bar{p}) - \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p) dp$$

En supposant que la fonction de demande est telle que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p D(p) = 0$$

c'est-à-dire que la demande converge plus vite vers 0 que le prix diverge vers l'infini, on obtient :

$$\int_{\bar{p}}^{\infty} p D'(p) dp = - \bar{p} D(\bar{p}) - \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p) dp$$

En substituant dans (1), sans oublier le signe moins devant l'intégrale, on trouve

$$S(\bar{q}) = - \int_{\bar{p}}^{\infty} p D'(p) dp - \bar{p} \bar{q}$$

$$= \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p) dp + \bar{p} \bar{q} - \bar{p} \bar{q}$$

$$= \int_{\bar{p}}^{\infty} D(p) dp = S(\bar{p})$$

Q.Q.F.D