Élasticité prix de la demande

Soient

$$D : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$p \longmapsto D(p)$$

la fonction de demande, et

$$P : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$q \longmapsto P(q)$$

la fonction de demande inverse. On suppose que ces fonctions sont monotones décroissantes, continues, dérivables et que les dérivées sont continues sur le domaine de définition. Ces deux fonctions vérifient

$$\begin{cases} D(P(q)) = q \\ P(D(p)) = p \end{cases}$$

L'élasticité prix de la demande décrit la relation entre le taux de croissance du prix et le taux de croissance de la demande. Par définition, l'élasticité ϵ est donc :

$$\frac{\Delta q}{q} = -\epsilon \frac{\Delta p}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon = -\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

L'élasticité nous permet de dire de combien de % la quantitée demandée diminue lorsque le prix augmente de 1% (⚠ Attention à la convention de signe, l'élasticité est positive mais la demande baisse quand le prix augmente, $D'(p)<0$).

En toute généralité, l'élasticité dépend du niveau du prix p (ou de la quantité q de façon équivalente) MAIS aussi de Δp (la variation de prix considérée).

Afin d'éliminer la dépendance à Δp, on considère une variation infinitésimale du prix et postule la définition suivante de l'élasticité :

$$\mathcal{E} = -\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{p}{q} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\overbrace{D(p+\Delta p) - D(p)}^{\equiv \Delta q}}{\Delta p}$$

où nous reconnaissons la définition de la dérivée de la fonction de demande, et donc

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{pD'(p)}{D(p)}}$$

l'élasticité dépend du niveau du prix. On peut alternativement exprimer l'élasticité comme une fonction de q. On remplace p par $P(q)$ et $D(p)$ par q :

$$\varepsilon = -\frac{P(q)\,D'(p)}{q}$$

Il nous reste à exprimer la dérivée en fonction de q. On sait que

$$D(P(q)) = q$$

car D et P sont des fonctions réciproques. En dérivant par rapport à q il vient :

$$D'(P(q))\,P'(q) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad D'(p)\,P'(q) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad D'(p) = \frac{1}{P'(q)}$$

On a donc finalement l'expression suivante de l'élasticité en fonction de q :

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{P(q)}{q\,P'(q)}}$$