$$\mathcal{U}(q_1,q_2,M)=\begin{cases} M+a_1q_1+a_2q_2-\frac{1}{2}(b_1q_1^2+b_2q_2^2+2dq_1q_2) & \text{si } q_j\leq \frac{a_jb_i-a_id}{b_1b_2-d^2}\ \forall j\neq i \\ M+\frac{a_1^2b_2+a_2^2b_1-2a_1a_2d}{2(b_1b_2-d^2)} & \text{sinon.}\end{cases}$$

On note que l'utilité marginale du bien j est

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j}=a_j-b_jq_j-dq_i$$

Si $d<0$ (complémentarité) une baisse de q_2 (par exemple parce que le prix du bien 2 augmente) induit une baisse de l'utilité marginale du bien 1 et donc une diminution du prix que le ménage est prêt à payer pour l'acquisition de bien 1 (la demande en bien 1 diminue, toute chose égale par ailleurs).

En substituant la contrainte budgétaire

$$M+p_1q_1+p_2q_2=R$$

dans la fonction d'utilité (pour remplacer M) et en maximisant l'utilité par rapport à q_1 et q_2 on obtient les demandes inverses (CNO) :

$$\begin{cases} p_1=a_1-b_1q_1-dq_2 \\ p_2=a_2-b_2q_2-dq_2\end{cases}$$

On obtient les fonctions de demande en inversant ce système, c'est-à-dire en exprimant (q_1, q_2) en fonction de (p_1, p_2). On peut réécrire le système matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & d \\ d & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & d \\ d & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & d \\ d & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Nous devons donc inverser une matrice pour trouver les fonctions de demande :

$$\begin{vmatrix} b_1 & d \\ d & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 - d^2$$

la transposée de la matrice des co-facteurs

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & d \\ d & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b_1 b_2 - d^2} \begin{pmatrix} b_2 & -d \\ -d & b_1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1 b_2 - d^2} \begin{pmatrix} b_2 & -d \\ -d & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1 b_2 - d^2} \begin{pmatrix} b_2(a_1 - p_1) - d(a_2 - p_2) \\ b_1(a_2 - p_2) - d(a_1 - p_1) \end{pmatrix}$$

Nous avons donc la demande en bien 1 :

$$q_1 = \frac{b_2(a_1-p_1) - d(a_2-p_2)}{b_1 b_2 - d^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad q_1 = \alpha_1 - \beta_1 p_1 + \delta p_2$$

avec $\alpha_1 = \dfrac{b_2 a_1 - d a_2}{b_1 b_2 - d^2}$, $\beta_1 = \dfrac{b_2}{b_1 b_2 - d^2}$ et $\delta = \dfrac{d}{b_1 b_2 - d^2}$

De la même façon, la demande en bien 2 est

$$q_2 = \alpha_2 - \beta_2 p_2 + \delta p_1$$

avec $\alpha_2 = \dfrac{b_1 a_2 - d a_1}{b_1 b_2 - d^2}$ et $\beta_2 = \dfrac{b_1}{b_1 b_2 - d^2}$

- Si les biens sont complémentaires, $d<0 \Rightarrow \delta<0$, alors l'augmentation du prix du bien 2 induit une baisse de la demande en bien 1 (car son utilité marginale diminue)
- Si les biens sont substituables, $d>0 \Rightarrow \delta>0$, alors l'augmentation du prix du bien 2 induit une augmentation de la demande en bien 1 (car son utilité marginale augmente → la disposition du ménage à payer du bien 1 augmente).