Exercice 1

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

$$I_t = sY_t \qquad C_t = (1-s)Y_t$$

$$Y_t = F(K_t, A_tL_t)$$ où F est une fonction de product° néoclassique

(1) $L_t = (1+n)L_{t-1} \quad \forall\, t$

$\Rightarrow L_t = (1+n)(1+n)L_{t-2} = (1+n)^2 L_{t-2}$

$\Rightarrow L_t = (1+n)^3 L_{t-3}$

$\vdots$

$\Rightarrow L_t = (1+n)^t L_0$

(2) Le taux de croissance de A_tL_t est défini par

$$g_{AL} = \frac{A_tL_t}{A_{t-1}L_{t-1}} - 1$$

$\Leftrightarrow g_{AL} = (1+x)(1+n) - 1$

$\Leftrightarrow g_{AL} = 1 + x + n + xn - 1$

$\Leftrightarrow \boxed{g_{AL} = x + n + xn}$

en plus par rapport à une modélisation en temps continu

(3) On sait que :

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + s F(K_t, A_t L_t)$$

en divisant les deux membres par $A_t L_t$:

$$\frac{K_{t+1}}{A_t L_t} = (1-\delta) \frac{K_t}{A_t L_t} + s \frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t}$$

homogenéité de degré 1

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} \cdot \frac{A_{t+1} L_{t+1}}{A_t L_t} = (1-\delta) \hat{k}_t + s F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, \frac{A_t L_t}{A_t L_t}\right)$$

$$\Leftrightarrow (1+n)(1+x) \hat{k}_{t+1} = (1-\delta) \hat{k}_t + s F(\hat{k}_t, 1)$$

en posant $f(\hat{k}) = F(\hat{k}, 1)$ la fonction de production par tête efficace :

$$(1+n)(1+x) \hat{k}_{t+1} = (1-\delta) \hat{k}_t + s f(\hat{k}_t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{k}_{t+1} = \frac{s}{(1+n)(1+x)} f(\hat{k}_t) + \frac{1-\delta}{(1+n)(1+x)} \hat{k}_t}$$

(4) L'état stationnaire $\hat{k}^*$ est tel que

$$(1+n)(1+x) \hat{k}^* = s f(\hat{k}^*) + (1-\delta) \hat{k}^*$$

$$\Leftrightarrow (1+n+x+nx-1+\delta) \hat{k}^* = s f(\hat{k}^*)$$

$$\iff (n+x+\delta+nx)\hat{k}^* = s f(\hat{k}^*)$$

En excluant la solution $\hat{k}^*=0$ (l'état stationnaire trivial), on obtient la condition

$$\frac{f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*} = \frac{n+x+nx+\delta}{s}$$

l'état stationnaire $\hat{k}^*>0$ existe et est unique car :

+ la productivité moyenne $\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}$ est monotone décroissante.

+ la productivité moyenne varie de $+\infty$ à zero (conditions d'Inada).

Posons $\varphi(\hat{k}) = \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}$ la productivité moyenne.
Cette fonction est bijective et donc inversible, ainsi

$$\hat{k}^* = \varphi^{-1}\left(\frac{n+x+\delta+nx}{s}\right)$$

$\hookrightarrow$ $\hat{y}^* = f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{n+x+\delta+nx}{s}\right)\right)$

et $\hat{c}^* = (1-s)\cdot f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{n+x+\delta+nx}{s}\right)\right)$

(5) La dynamique est gouvernée par

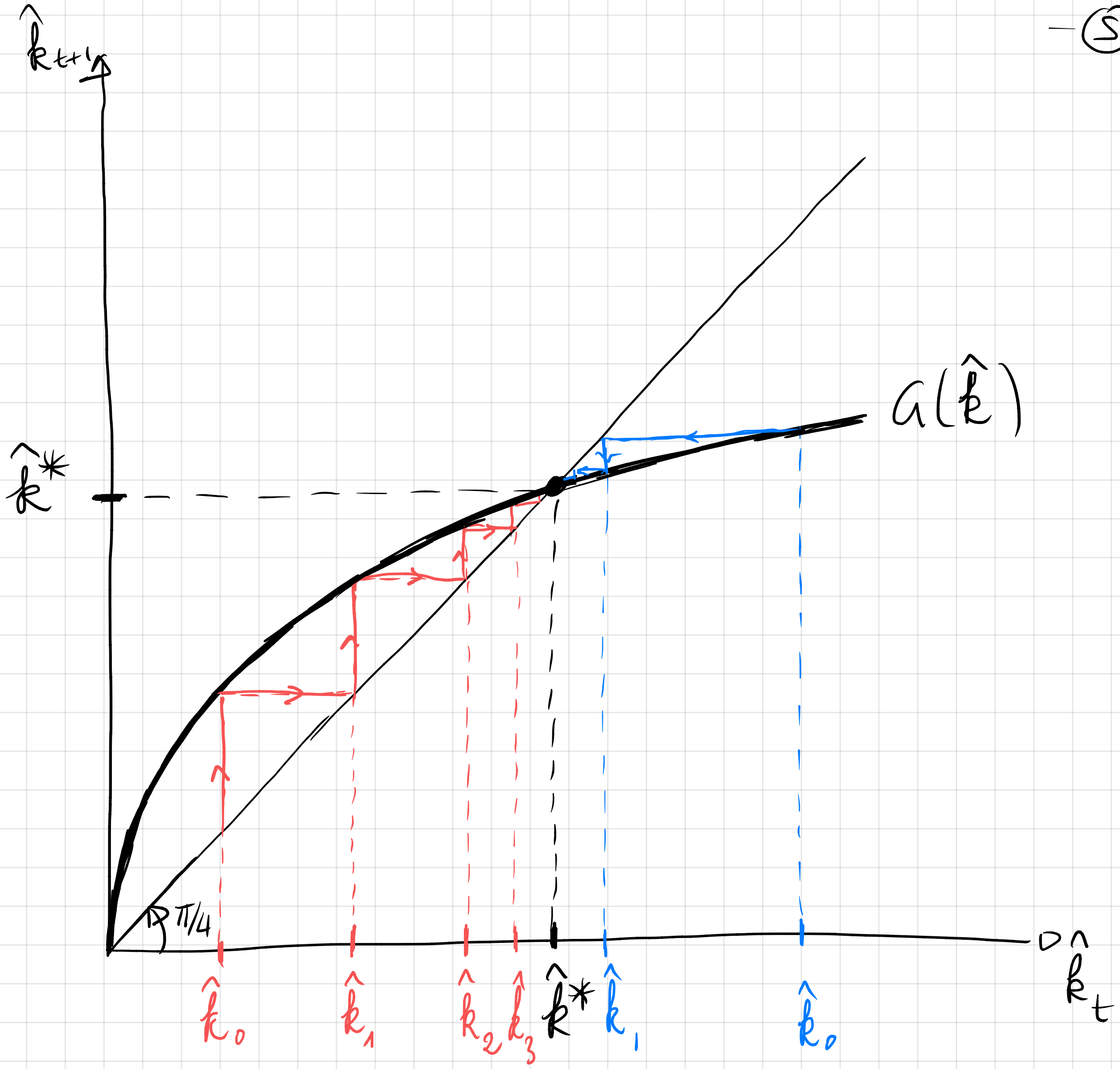
$$\hat{k}_{t+1} = G(\hat{k}_t)$$

avec $$G(\hat{k}) = \frac{s f(\hat{k}) + (1-\delta)\hat{k}}{(1+n)(1+x)}$$

+ la fonction G est monotone croissante

$$\left.\begin{array}{l} + \lim\limits_{\hat{k} \to 0} G'(\hat{k}) = \infty \\[2ex] + \lim\limits_{\hat{k} \to \infty} G'(\hat{k}) = \dfrac{1-\delta}{(1+n)(1+x)} < 1 \end{array}\right\} \text{conditions d'Inada}$$

+ $G''(\hat{k}) = \dfrac{s}{(1+n)(1+x)} f''(\hat{k}) < 0$



(6) La production par tête est

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_t = \hat{y}_t \cdot A_t$$

à long terme :

$$y_t = \hat{y}^* \cdot A_t$$

le taux de croissance de y_t à long terme est donc le taux de croissance de l'efficacité du travail (A_t) :

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{\hat{y}^* A_t}{\hat{y}^* A_{t-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_t}{y_{t-1}} = \frac{A_t}{A_{t-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_t}{y_{t-1}} = 1+x \quad \text{à long terme.}$$

De la même façon à long terme le taux de croissance de la production aggrégée $(1+n)(1+x)-1 = n+x+nx$.

Exercice 2

$F(K,L)$ une fonction de product° néoclassique

Montrons que K est un facteur essentiel à la production.

- Asymptotiquement les productivités moyenne et marginale du travail ont le même comportement :

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\overset{\text{tend vers l'infini}}{Y}}{\underset{\text{tend vers l'infini}}{L}} = \lim_{L\to\infty} \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial L}}_{=1}} = \lim_{L\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = 0$$

règle de l'Hôpital

condition d'Inada

- Puisque la fonction de production est homogène de degré 1, on peut écrire la productivité moyenne du travail comme :

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

- Pour tout $K < \infty$ donné, on a donc

$$\lim_{L\to\infty} \frac{Y}{L} = F(0,1)$$

- Puisque la productivité moyenne, comme la productivité marginale, tend vers 0, on doit donc avoir :

$$F(0,1) = 0$$

soit en multipliant par L :

$$F(0,L) = 0$$

La production est donc nulle si le stock de capital est nul.

Exercice 3

(1) On a

$$\underbrace{K_{t+1} = sF(K_t, L_t)}_{\text{investissement}} + \underbrace{(1-\delta) K_t}_{\text{le stock hérité du passé}}$$

en divisant les deux membres par L_t, il vient :

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = s\,\frac{F(K_t, L_t)}{L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \cdot \frac{L_{t+1}}{L_t} = s\,F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) + (1-\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{k_{t+1}(1+n) = s\,f(k_t) + (1-\delta)\,k_t}$$

(2) L'état stationnaire k^* doit vérifier :

$$(1+n)\,k^* = s\,f(k^*) + (1-\delta)k^*$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+\delta)\,k^* = s\,f(k^*)$$

en excluant l'état stationnaire trivial, il vient donc

productivité moyenne du capital à l'état stationnaire

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$

Posons $\phi(k) = \frac{f(k)}{k}$, une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, la productivité moyenne du capital. Il s'agit d'une fonction continue, monotone décroissante variant de $+\infty$ à 0. Il existe donc une unique solution pour k^*. De plus cette fonction est bijective sur $\mathbb{R}^+$, et admet donc une fonction réciproque ϕ^{-1}. L'état stationnaire est donc

$$k^* = \phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s}\right)$$

(3) Dérivons k^* par rapport à s.

Rappel

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\frac{dk^*}{ds} = -\frac{n+\delta}{s^2} \cdot \frac{1}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s}\right)\right)}$$

Or

$$\phi'(k) = \left(\frac{f(k)}{k}\right)' = \frac{kf'(k) - f(k)}{k^2} < 0$$

$-F_L(K,L)$

et $\phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s}\right) = k^*$. On a donc

$$\frac{dk^*}{ds} = -\frac{n+\delta}{s^2} \cdot \frac{k^{*2}}{k^* f'(k^*) - f(k^*)} > 0$$

Une augmentation du taux d'épargne se traduit donc par une augmentation de l'état stationnaire du capital par tête. Comme la production par tête est une fonction monotone croissante du capital par tête :

$$y = f(k)$$

l'augmentation du taux d'épargne induit finalement une augmentation de la production par tête.

(4) $$\epsilon_{y/k} = \frac{\frac{dy}{dk}}{\frac{y}{k}} = \frac{f'(k)}{\frac{f(k)}{k}} = \frac{kf'(k)}{f(k)}$$

En toute généralité, l'élasticité de la production par rapport au stock de capital dépend du niveau de k.

(5) À l'état stationnaire la consommation par tête est donnée par

$$c^*(s) = (1-s)\, f(k^*(s))$$

$$\Leftrightarrow \quad c^*(s) = f(k^*(s)) - s\, f(k^*(s))$$

par définition de l'état stationnaire

$$\Leftrightarrow \quad c^*(s) = f(k^*(s)) - (n+\delta)\, k^*(s)$$

CPO $$\frac{dc^*}{ds} = 0 \Leftrightarrow \left(f'(k^*) - (n+\delta) \right) \frac{dk^*}{ds} = 0$$

Nous savons que $\frac{dk^*}{ds} > 0$. Pour que la dérivée de c^* par rapport à s soit nulle il faut et il suffit que le taux d'épargne soit tel que :

$$f'(k^*) = (n+\delta)$$

c'est-à-dire que le taux d'intérêt net de la dépréciation soit égal au taux de croissance de la population.

Puisque f' est une fonction monotone décroissante sur $\mathbb{R}^+$ prenant des valeurs entre $+\infty$ et 0, on sait que la productivité marginale est une fonction inversible. Le taux d'épargne de la règle d'or doit donc être tel que

$$k^*(s) = f'^{-1}(n+\delta)$$

Comme k^* est une fonction monotone croissante de s sur l'intervalle $[0,1]$, cette fonction est elle aussi inversible. Il existe donc un unique taux d'épargne s_{or} tq $\frac{dc^*}{ds} = 0$.

Pour obtenir une expression plus explicite du taux d'épargne de la règle d'or, nous pouvons relier celui-ci à l'élasticité de la production par rapport au capital (ou à la part du revenu du capital dans le revenu total. En effet, à l'état stationnaire nous devons avoir

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$

quel que soit le taux d'épargne. En particulier, pour le taux d'épargne de la règle d'or, nous devons donc avoir

$$s_{or} = \frac{(n+\delta)\,k^*}{f(k^*)}$$

or nous savons que s_{or} est tel que $f'(k^*) = n+\delta$. Ainsi nous devons avoir :

$$s_{or} = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}$$

A la règle d'or le taux d'épargne doit être égal à la part du revenu du capital dans le revenu total.

<u>Remarque</u> Dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas $f(k) = k^\alpha$, nous trouverions

$$s_{or} = \alpha$$

Nous n'avons pas montré que s_{or}, le taux d'épargne qui annule $\frac{dc^*}{ds}$, maximise bien la consommation à l'état stationnaire. Nous pourrions l'établir en montrant que la dérivée seconde $\frac{d^2c^*}{ds^2}$ est négative...
Il est plus simple d'étudier le signe de la dérivée première. Nous avons

$$\frac{dc^*}{ds} = \left(f'(k^*) - (n+\delta) \right) \frac{dk^*}{ds}$$

Comme $\frac{dk^*}{ds} > 0$, la dérivée première est du signe de

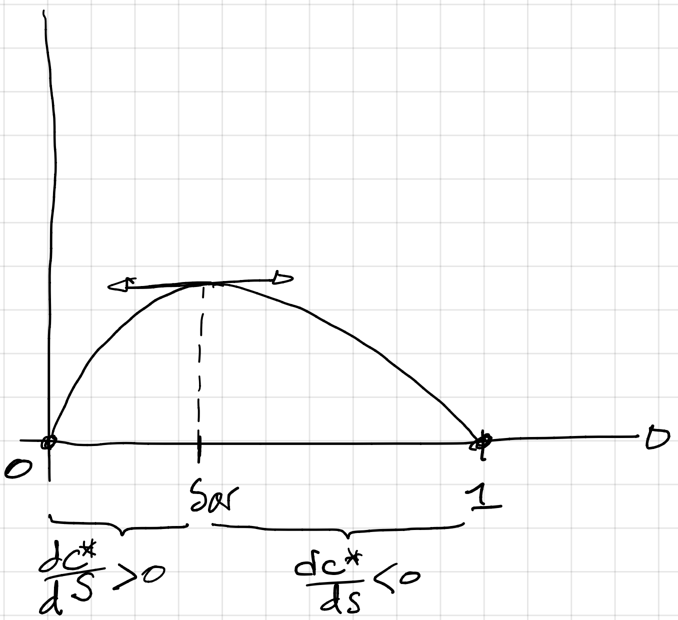
$$f'(k^*(s)) - (n+\delta)$$

On sait que f' est une fonction monotone décroissante du stock de capital par tête, et que k^* est une fonction croissante de s.
Ainsi $f'(k^*(s))$ est une fonction décroissante de s. Si $s = s_{or}$, on a $f'(k^*(s)) - (n+\delta) = 0$

donc si $s < s_{or}$ $f'(k^*(s)) > n+\delta$

et si $s > s_{or}$ $f'(k^*(s)) < n+\delta$. Ainsi

$$\frac{dc^*}{ds} < 0 \quad \text{ssi} \quad s > s_{or}$$



Exercice 4 La dynamique du stock de capital par tête est gouvernée par l'équat° récurrente suivante :

$$k_{t+1} = G(k_t)$$

$$\text{avec } G(k) = \frac{1}{1+n}\left[s f(k) + (1-\delta) k \right]$$

① On sait qu'il existe un unique état stationnaire $k^* > 0$. Cette dynamique est non linéaire, mais on peut approximer celle-ci dans un voisinage de l'état stationnaire en considérant un développement de Taylor d'ordre 1 en k^*. En effet :

$$G(k) \simeq G(k^*) + G'(k^*)(k-k^*)$$

Par définition de l'état stationnaire, on a donc :

$$G(k) \simeq k^* + G'(k^*)(k-k^*)$$

On peut donc approximer l'équat° récurrente :

$$\underbrace{k_{t+1} - k^*}_{\text{distance à l'état stationnaire}} \simeq G'(k^*)(k_t - k^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{k_{t+1} - k^*}{k^*}}_{\text{distance à l'état stationnaire en pourcentage}} \simeq G'(k^*) \cdot \frac{k_t - k^*}{k^*}$$

$$z_{t+1} \simeq G'(k^*) z_t$$

On sait que

$$G'(k) = \frac{s}{1+n} f'(k) + \frac{1-\delta}{1+n}$$

on a donc

$$G'(k^*) = \frac{1}{1+n}\left[s f'(k^*) + 1 - \delta \right]$$

Par ailleurs nous savons qu'à l'état stationnaire nous avons

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$

ou encore

$$s = \frac{k^*}{f(k^*)}(n+\delta)$$

En substituant dans l'expression de $G'(k^*)$:

$$G'(k^*) = \frac{1}{1+n}\left[\underbrace{\frac{k^* \cdot f'(k^*)}{f(k^*)}}_{\alpha(k^*)} (n+\delta) + 1 - \delta \right]$$

$\alpha(k^*)$ la part du revenu du capital dans le revenu total.

La dynamique approximée nous dit que la distance à l'état stationnaire évolue de la façon suivante :

$$z_{t+1} = \underbrace{\frac{1}{1+n}\left[\alpha(k^*)(n+\delta)+1-\delta\right]}_{G'(k^*)} z_t$$

(2) la vitesse de convergence est le taux de (dé)croissance de la distance à l'état stationnaire :

La vitesse de convergence est au taux de décroissance (positif par convention)

$$\beta = -\left(\underbrace{G'(k^*)}_{\text{facteur de croissance}} - 1\right)$$

On voit que $G'(k^*)<1$ car en k^* la fonction $G(k)$ coupe la première bissectrice, sa pente doit donc être inférieure à 1 à l'état stationnaire

$$\iff \beta = -\frac{1}{1+n}\left[\alpha(k^*)(n+\delta)+1-\delta-(1+n)\right]$$

$$\iff \beta = -\frac{1}{1+n}\left[\alpha(k^*)(n+\delta)-(n+\delta)\right]$$

$$\iff \boxed{\beta = (1-\alpha(k^*))\frac{n+\delta}{1+n}}$$

Exercice 5

Afin d'introduire un choc de productivité temporaire ou permanent on change la fonction de production en rajoutant un paramètre contrôlant la productivité. Soit $F(K,L)$ une fonction de production néoclassique, et $f(k)$ la fonction de production intensive associée. On pose

$$Y = \mathcal{F}(K,L) = A\,F(K,L)$$

où A est un paramètre positif. Si A augmente alors, toute chose égale par ailleurs, on produit plus. Il est facile de vérifier que la dynamique du stock de capital par tête est alors donnée par :

$$(1+n)\,k_{t+1} = sAf(k_t) + (1-\delta)k_t$$

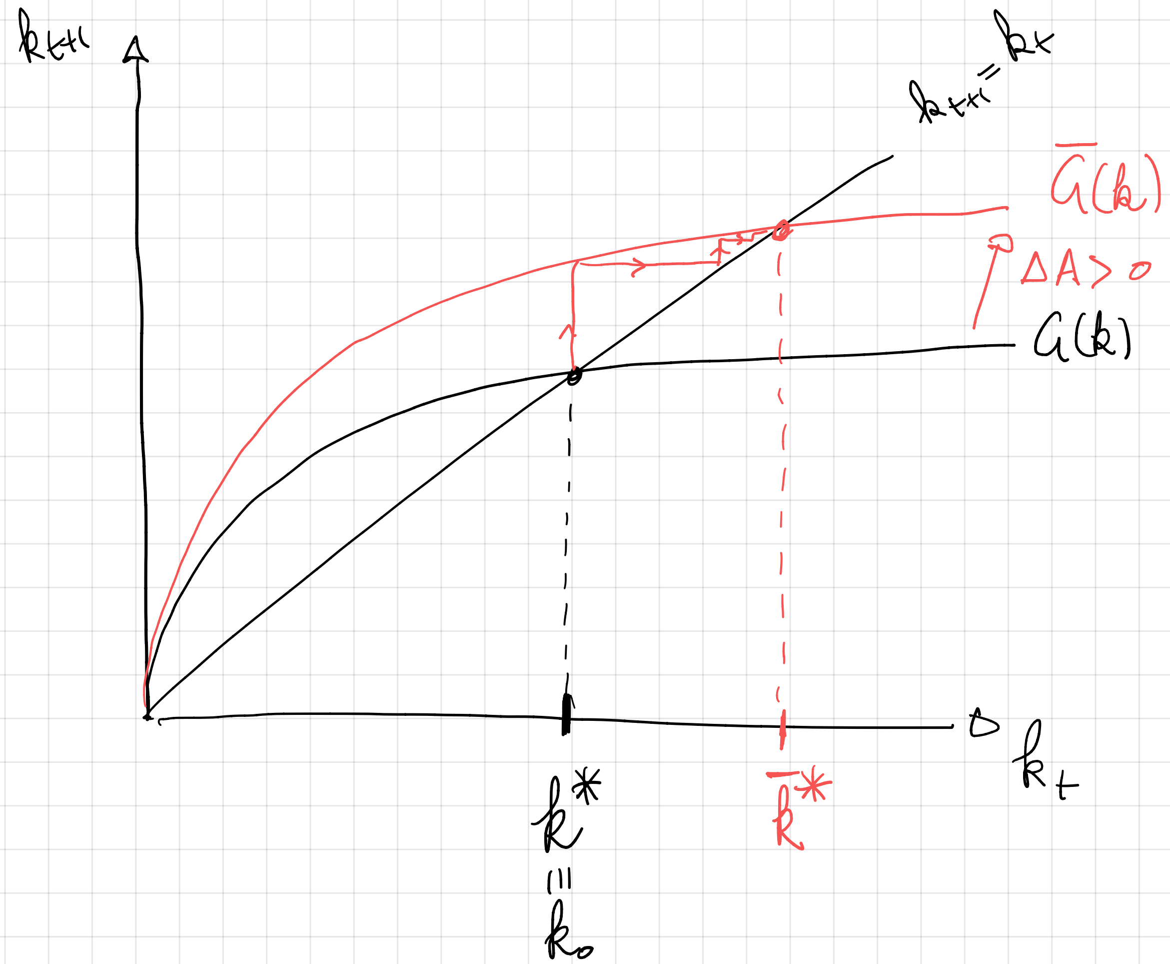
$$\Leftrightarrow \quad k_{t+1} = G(k_t)$$

avec $G(k) = \dfrac{1}{1+n}\left[sAf(k) + (1-\delta)k\right]$

La présence du nouveau paramètre A ne change pas les propriétés de la fonction G. La représentation graphique n'est donc pas changée

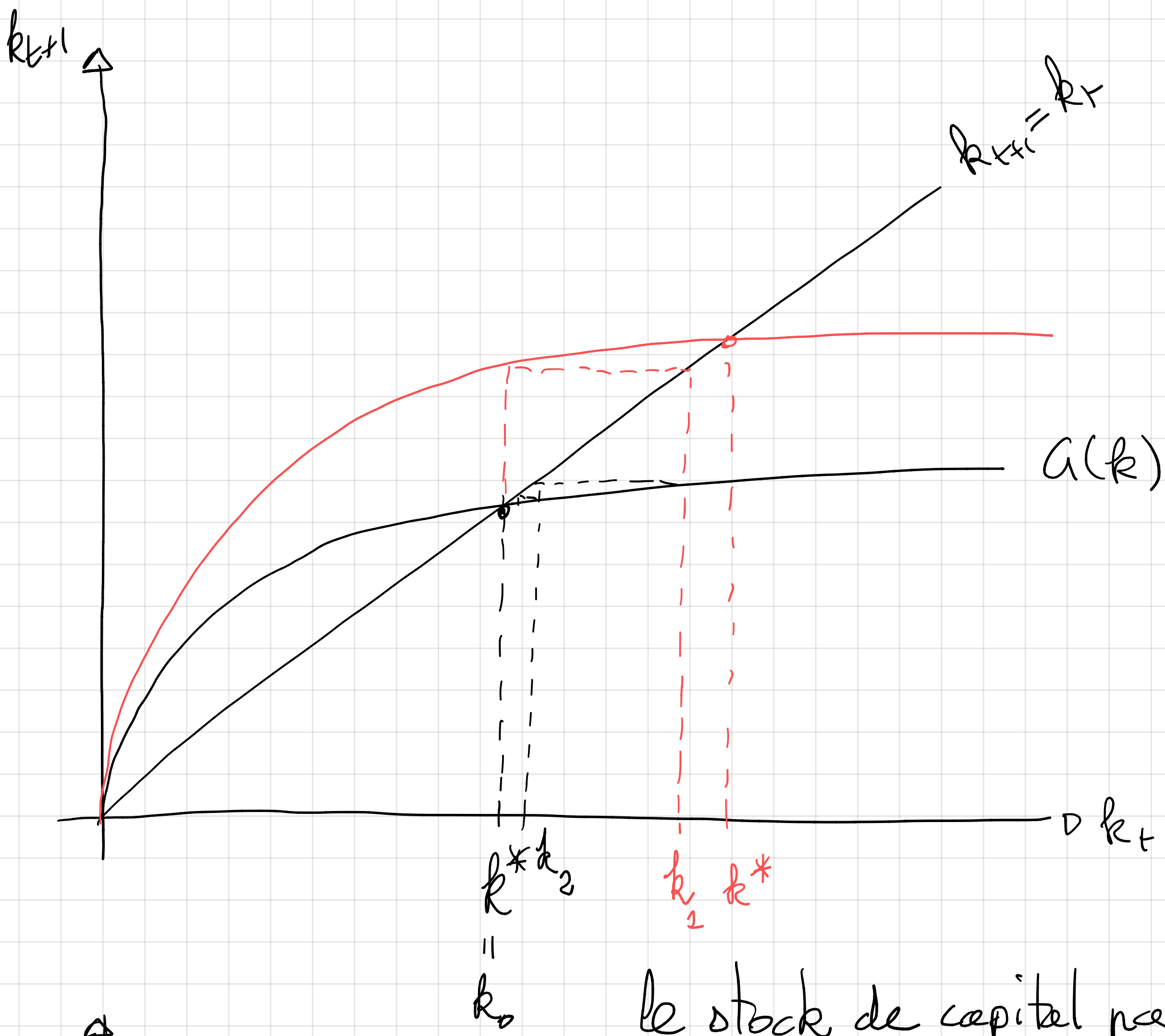
(1)

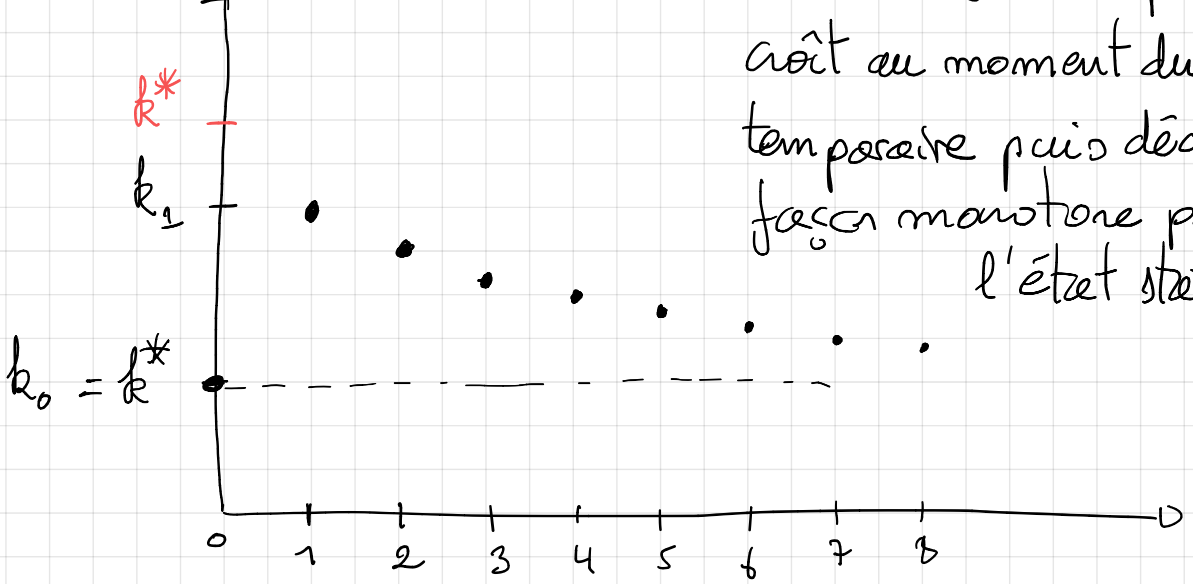
choc positif permanent sur A



Le choc permanent augmente le niveau de long terme de l'économie (k^*, y^* et c^*). Si on part initialement de l'état stationnaire (avant le choc), on observe pendant la transition un taux de croissance positif (pour rejoindre le nouvel état stationnaire).

(2) Considérons un choc transitoire.
Supposons que l'économie soit initialement, en période 0, à l'état stationnaire.
En période 1 A augmente puis revient à son niveau initial en période 2





Le stock de capital par tête croît au moment du choc temporaire puis décroît de façon monotone pour rejoindre l'état stationnaire.

Exercice 6

(1) La dynamique du stock de capital agrégé est donnée par

$$K_{t+1} = \underbrace{s(1-\tau)F(K_t, L_t)}_{\text{investissement}} + (1-\delta)K_t$$

en divisant les deux membres de l'égalité par L_t et en exploitant l'homogénéité de degré 1 de la fonction F, il vient

$$(1+n)k_{t+1} = s(1-\tau)F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$$

$$\Leftrightarrow \quad k_{t+1} = G(k_t)$$

avec $G(k) = \frac{1}{1+n}\left[s(1-\tau)f(k_t) + (1-\delta)k_t\right]$

(2) ~~(3)~~ L'état stationnaire k^* vérifie

$$k^* = G(k^*)$$

c'est-à-dire

$$(1+n)k^* = s(1-\tau)f(k^*) + (1-\delta)k^*$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+\delta)k^* = s(1-\tau)f(k^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s(1-\tau)}$$

en excluant l'état stationnaire trivial $k^* = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\phi(k^*)}_{\text{productivité moyenne}} = \frac{n+\delta}{s(1-\tau)}$$

On sait que la productivité moyenne ϕ est une fonction continue monotone décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et variant de $+\infty$ à 0. Ainsi la fonction ϕ est bijective et donc inversible, on a donc

$$k^* = \phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s(1-\tau)}\right)$$

On sait que la fonction ϕ^{-1} est monotone décroissante, ainsi l'état stationnaire est une fonction décroissante de τ. Plus la taille de l'état est importante plus le niveau de long terme de l'économie intensive est bas.

$$y^* = f\left(\phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s(1-\tau)}\right)\right)$$

Cela n'est pas étonnant, car dans ce

modèle la dépense publique ne sert à rien (G est comme de l'argent jeté à la mer).

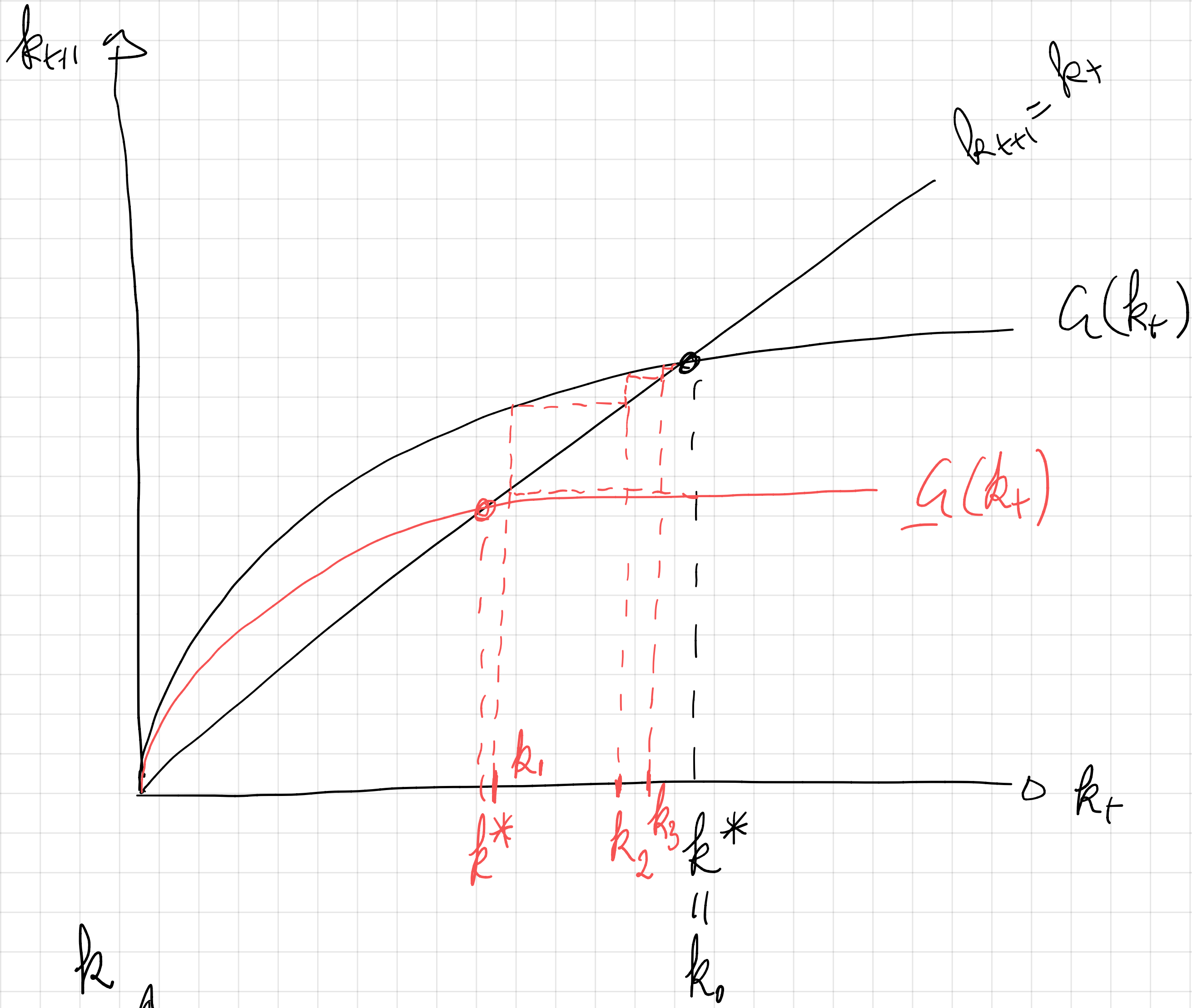
Le niveau de long terme de la consommation par tête est :

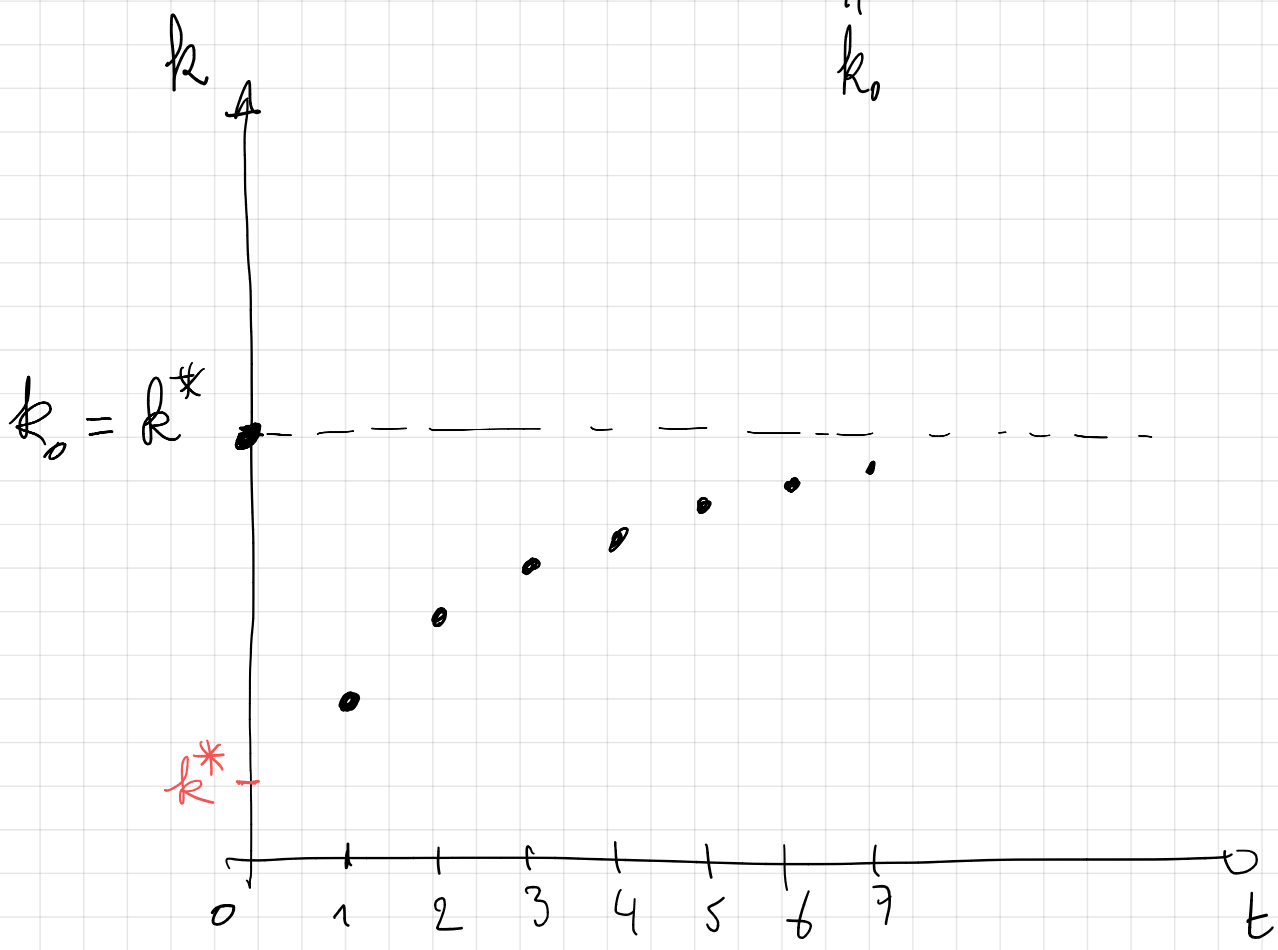
$$c^* = (1-s)(1-\tau)\, f\left(\phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s(1-\tau)}\right)\right)$$

On note qu'il n'y a pas d'arbitrage sur le niveau de consommation par tête à long terme quant à la taille de l'état. Une augmentation de la taxe conduit, sans ambiguité, à une baisse de la consommation intérieure à long terme.

(4) Un choc transitoire (positif) sur les dépenses publiques et donc sur la taxe τ puisque le budget de l'état doit rester à l'équilibre se traduit, au moment du choc, par de la décroissance puis de la croissance pour revenir

à l'état stationnaire





Exercice 7

la product° aggregée $Y_t = K_t^\alpha G_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta} = F(K_t, G_t, L_t)$

L_0 $y_t = k_t^\alpha g_t^\beta$ la production par tête

La loi d'évolution du stock de capital aggrégé :

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta) K_t$$

où l'investissement est une fraction, s, du revenu disponible, $(1-\tau) Y_t$. Nous avons donc

$$K_{t+1} = s(1-\tau) F(K_t, G_t, L_t) + (1-\delta) K_t$$

en divisant les deux membres par L_t et en exploitant l'homogénéité de degré 1 de F, il vient :

$$(1+n) k_{t+1} = s(1-\tau) f(k_t, g_t) + (1-\delta) k_t$$

où $$f(k_t, g_t) = k_t^\alpha g_t^\beta$$

Par ailleurs, puisque le budget de l'état doit être équilibré à chaque période, nous savons que

$$g_t = \tau y_t$$

$$\Leftrightarrow \quad g_t = \tau k_t^\alpha g_t^\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad g_t^{1-\beta} = \tau k_t^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad g_t = \tau^{\frac{1}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

En substituant dans la fonction de product° par tête

$$y_t = k_t^{\alpha} \left(\tau^{\frac{1}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \right)^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_t = \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

et donc

$$\boxed{(1+n) k_{t+1} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} \cdot k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} + (1-\delta) k_t}$$

b a

(2) A l'état stationnaire k^* nous devons avoir :

$$(1+n) k^* = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} k^{*\frac{\alpha}{1-\beta}} + (1-\delta) k^*$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+\delta) k^* = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} k^{*\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \quad k^{*\,1-\frac{\alpha}{1-\beta}} = \frac{s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{n+\delta}$$

$$\Leftrightarrow \quad k^{*\frac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}} = \frac{s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{n+\delta}$$

$$k^* = \left(\frac{s(1-\tau)\,\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{n+\delta} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad y^* = \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} \cdot \left(\frac{s(1-\tau)\,\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad c^* = (1-s)(1-\tau)\,\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\frac{s(1-\tau)\,\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

(3) Conséquences d'une variation de la taille de l'état (le niveau de la taxe τ).

La taxe τ est dans l'intervalle $[0,1]$.

- k^* est une fonction monotone croissante de
$$\varphi(\tau) = (1-\tau)\,\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

On a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, pour les valeurs extrêmes de la taxe le stock de capital par tête à l'état stationnaire (c'est aussi le long terme) est nul. En conséquence, pour ces valeurs la production par tête et la consommation par tête sont nulles à l'état stationnaire.

Puisque k^* est une fonct° monotone

croissante de $\varphi(\tau)$, le signe de $\frac{dk^*}{d\tau}$ est identique au signe de $\varphi'(\tau)$.

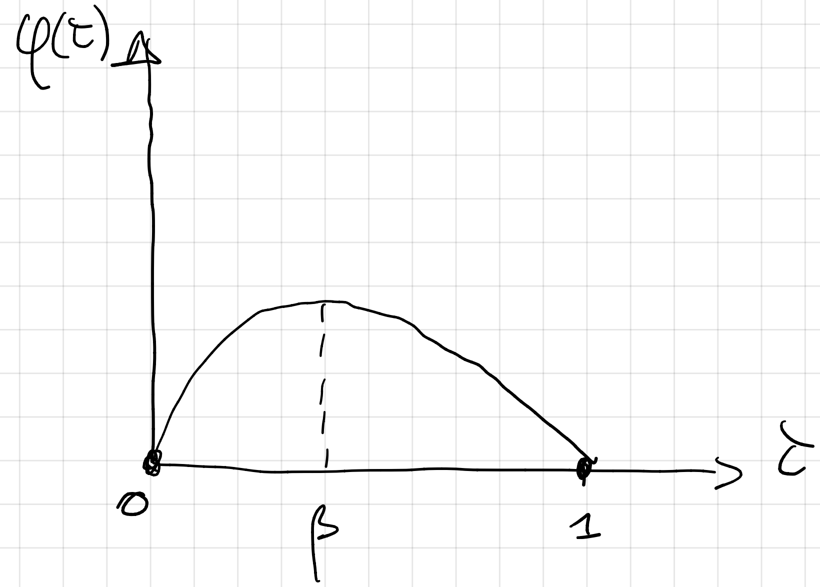
On montre facilement que $\varphi(\tau)$ est une fonct° croissante puis décroissante.

$$\varphi'(\tau) = \frac{\beta}{1-\beta}(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}-1} - \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(\tau) = \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1-\tau}{\tau} - 1\right)$$

Ainsi $\varphi'(\tau^*) = 0 \Leftrightarrow \tau^* = \beta$ et

$$\varphi'(\tau) \geq 0 \text{ ssi } \tau \leq \beta$$



Si τ est faible, au sens où $\tau < \beta$, une petite augmentation de τ induit une augmentation de $\varphi(\tau)$ et donc de k^*. Si τ est fort, au sens où $\tau > \beta$, une petite augmentation de τ induit une baisse de $\varphi(\tau)$ et donc de k^*.

- On remarque que c^* est aussi une fonction croissante de $\varphi(\tau)$. En effet

$$c^* = (1-s)\left[(1-\tau)\,\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right]^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \cdot \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \quad c^* = (1-s).\varphi(\tau)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \cdot \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

ainsi $\tau = \beta$ maximise le niveau de long terme de la consommation par tête, et les variations de τ ont qualitativement les mêmes conséquences sur k^* et c^*.

- On ne peut pas exprimer y^* en fonction de $\varphi(\tau)$ comme nous avons pu le faire pour c^* et k^*. Donc a priori les effets d'une variation de τ sur y^* vont être différents.
- Les conséquences sur la croissance dépendent des conséquences sur le long terme. S'il

faut rejoindre un état stationnaire plus élevé l'augmentation se traduit par de la croissance. S'il faut rejoindre un état stationnaire plus bas, on observera de la décroissance.

(4) Si $\alpha+\beta=1$, la fonction de production par tête devient linéaire dans le stock de capital par tête :

$$(1+n)k_{t+1} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} k_t + (1-\delta)k_t$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+n)\frac{k_{t+1}}{k_t} = s(1-\tau)\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} + (1-\delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{s\varphi(\tau)+1-\delta}{1+n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{g_{k,t+1} = \frac{s\varphi(\tau)-n-\delta}{1+n}}$$

le taux de croissance de k est constant, il ne dépend pas du niveau de k.
Si $s\varphi(\tau)-n-\delta>0$, l'économie croît indéfiniment $\to$ croissance endogène
$\to$ croissance ou décroissance dépend de la taille de l'état si $\varphi(\tau)$ est proche de 0