(5) Règle d'or et inefficience dynamique

On peut montrer que, même si le modèle décrit dans ce chapitre est dans un environnement parfaitement concurrentiel sans externalité ou asymétrie d'information, la dynamique d'équilibre peut être sous optimale au sens de Pareto. Dans ce modèle l'économie peut être dans une situation où elle accumule trop de capital.

De la même façon que dans le chapitre 1 (modèle de Solow) on peut définir une règle d'or qui sera décisive pour déterminer si l'équilibre dynamique est efficace ou non.

(5.1) La règle d'or

La contrainte de ressources de l'économie est :

$$C_t = \underbrace{F(K_t, L_t)}_{Y_t} - \underbrace{(K_{t+1} - K_t + \delta K_t)}_{S_t}$$

On peut redéfinir cette contrainte en termes de consommation par travailleur (jeune adulte) :

$$c_t = f(k_t) + (1-\delta) k_t - (1+n) k_{t+1}$$

⚠ Nous divisons C_t par le nombre de jeunes adultes, mais C_t contient la consommation des jeunes adultes <u>et</u> des vieux. Autrement dit dans ce qui suit on ne s'interesse pas, en soit, à la répartition de la consommation entre les jeunes et les vieux.

Définition 3 Le stock de capital par tête de la règle d'or, noté k_{or}, est le niveau de capital par tête qui assure le niveau soutenable le plus élevé de la consommation par tête.

Quand on parle d'un niveau soutenable de la consommation il faut comprendre un niveau que l'on peut maintenir indéfiniment.

↳ On va s'intéresser aux niveaux des variables à l'état stationnaire.

À l'état stationnaire, on peut réécrire la contrainte de ressource sous la forme :

$$c = f(k) - (n+\delta)k$$

Le niveau stationnaire de la consommat° par travailleur est une fonction du stock de capital par travailleur. On a alors

$$k^*_{or} = \arg\max_{\{k\}} c(k)$$

La condition nécessaire d'optimalité est

$$c'(k^*_{or}) = 0$$

$$\iff f'(k^*_{or}) - (n+\delta) = 0$$

$$\iff \boxed{\underbrace{f'(k^*_{or}) - \delta}_{r^*_{or}} = n}$$

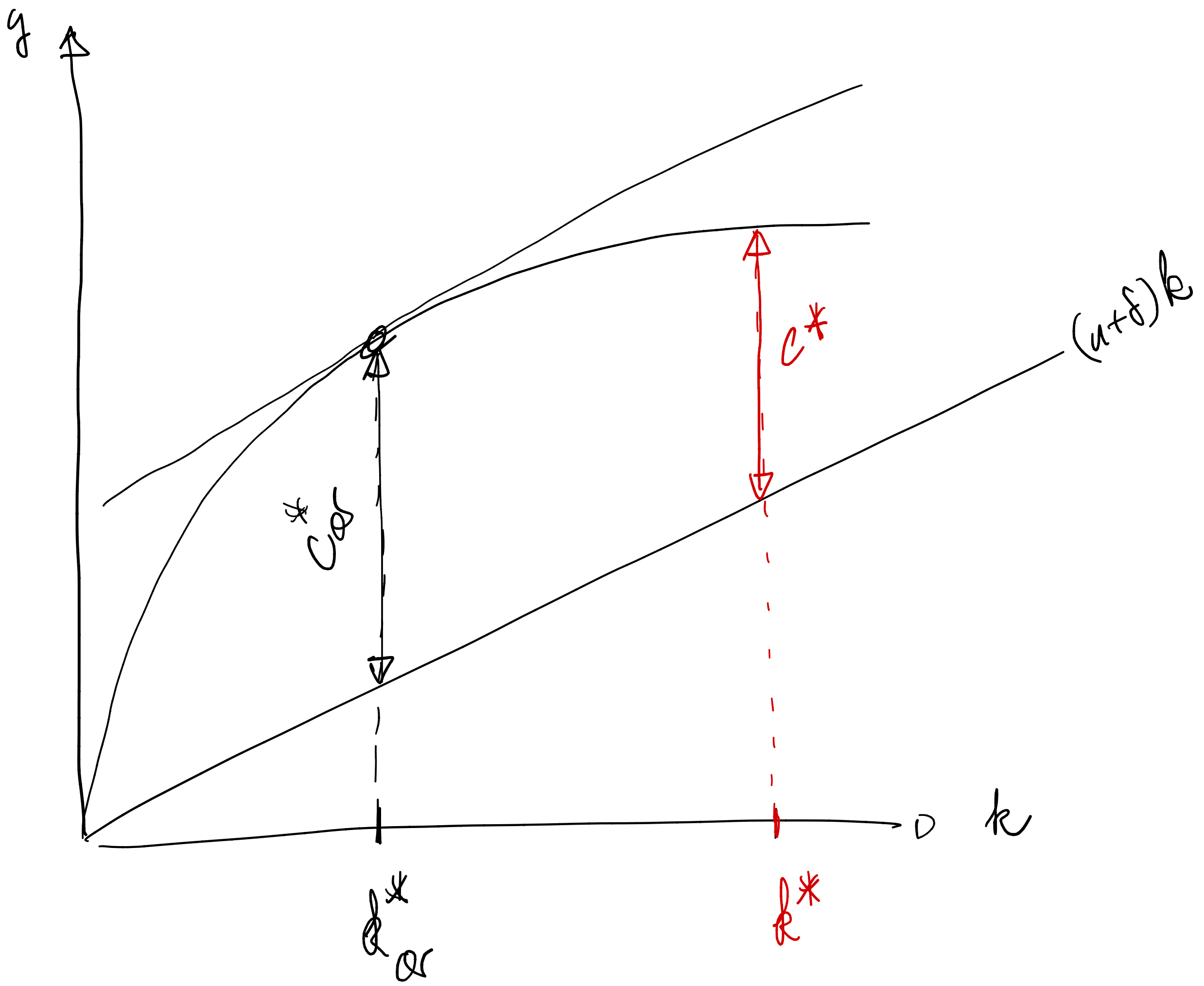
taux de croissance des variables agrégées à LT.

La condition nécessaire est aussi suffisante car

$$c''(k) = f''(k) < 0 \quad \forall k$$

Proposition 3 Le niveau de consommation par travailleur soutenable le plus élevé possible est obtenu lorsque la productivité marginale du capital net de la dépréciation est égale au taux de croissance de l'économie

Nous retrouvons la même condition que dans le modèle de Solow.



(5.2) Sur-accumulation dans le modèle de Diamond

Nous avons :

$$r^* \geq n \iff f'(k^*) - \delta \geq n$$

$$\iff k^* \leq k^*_{or}$$

Si le taux d'intérêt à long terme est inférieur au taux de croissance de la population, alors le stock de capital par travailleur à long terme est plus élevé que le stock de capital par travailleur de la règle d'or.
Il s'agit d'une situation de <u>sur-accumulation</u> : trop de capital par rapport à ce qui serait optimal du point de vue de la consommation.

Dans une telle situation il serait possible d'améliorer le bien être de tout le monde en réduisant l'epargne.

Dans cette situation, en baissant « un peu » l'épargne des jeunes en t_0, on augmente mécaniquement la consommat$^{\circ}$ des jeunes en t_0 sans changer le niveau de consommation des vieux en période t_0 (déterminée par l'épargne de la période précédente et la rémunération de l'épargne en période t_0). À la période suivante le stock de capital par tête baisse (puisque l'investissement a diminué) cela induit (1) une baisse du revenu des jeunes en période t_1 $(w'(k) = -kf''(k) > 0)$ mais pas forcément de leur consommation si l'épargne est plus faible et ② une baisse de l'épargne disponible pour les vieux éventuellement compensée par l'augmentat° de la rémunération de l'épargne (car $r'(k) = f''(k) < 0$).

Ainsi on peut imaginer une réallocation intertemporelle des ressources qui augmente (ou laisse inchangé pour les vieux de la période t_0) le bien être de tout le monde. Dans la proposition 4 on montrera formellement qu'une telle réallocat° est possible dans un cas de sur-accumulation.

⇝ Nous avions les mêmes discussions dans le cadre du modèle de Solow.

Mais une telle situation de sur-accumulation est-elle, au moins théoriquement possible ?

Pour répondre à cette question, considérons le cas vu en TD avec une fonction d'utilité log et une fonction de production Cobb-Douglas. Dans ce cas, nous avons montré que :

$$k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \cdot k_t^{\alpha} ,$$

$$k^* = \left(\frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

et $$r^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot (1+n) - \delta$$

Ainsi la différence entre le taux d'intérêt et le taux de croissance de l'économie (qui doit être négative pour que l'économie soit dans une situation de sur-accumulation) est donnée par :

$$r^* - n = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\beta+1}{\beta} \cdot (1+n) - \delta - n$$

Si α est assez proche de zero on peut donc se retrouver dans une situation de sur-accumulation.

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\beta+1}{\beta}(1+n) < n+\delta$$

$$\iff \frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{\delta+n}{1+n} \cdot \frac{\beta}{1+\beta}$$

$$\iff \alpha < (1-\alpha)\frac{\delta+n}{1+n} \cdot \frac{\beta}{1+\beta}$$

$$\iff \alpha\left(1+\frac{\delta+n}{1+n} \cdot \frac{\beta}{1+\beta}\right) < \frac{\delta+n}{1+n} \cdot \frac{\beta}{1+\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha < \frac{\frac{\delta+n}{1+n}\cdot\frac{\beta}{1+\beta}}{1+\frac{\delta+n}{1+n}\cdot\frac{\beta}{1+\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha < \frac{\beta(n+\delta)}{(1+n)(1+\beta)+\beta(n+\delta)}}$$

condition de sur-accumulation

(5.3) Inefficience dynamique

Définition 4 Toute trajectoire réalisable $\{(c_t, k_t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ telle qu'il n'existe pas d'autres trajectoires réalisables avec un niveau de consommation plus élevé sur certaines périodes sans baisses sur d'autres périodes est dite dynamiquement efficiente. Autrement on parle de trajectoires dynamiquement inefficientes.

~ Pareto

Proposition 4 Toute trajectoire réalisable $\{(c_t, k_t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{t\to\infty} k_t = k^* > k^*_{or}$ est dynamiquement inefficiente

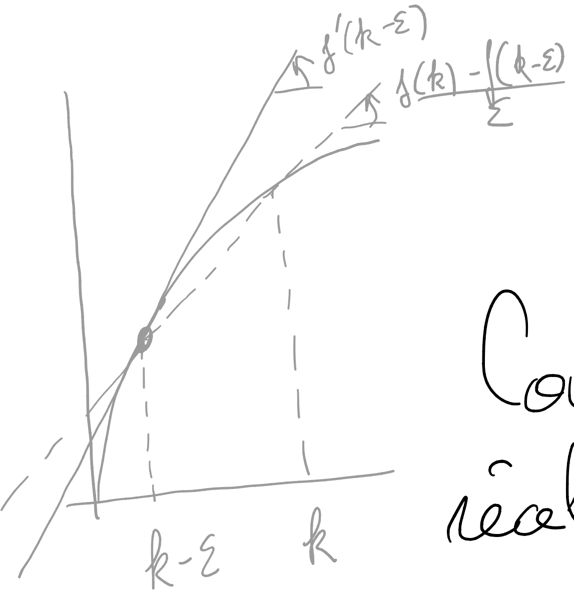
⤳ Pour une telle trajectoire on peut trouver une réallocation intertemporelle qui améliore l'utilité d'au moins une génération sans détériorer celle des autres générations.

Preuve Supposons que l'état stationnaire k^* soit plus élevé que l'état stationnaire de la règle d'or : $k^* > k^*_{or}$. On a donc :

$$f'(k^*) - \delta < n$$

puisque la productivité marginale du capital est une fonction décroissante.

Ainsi, par continuité il existe $\varepsilon > 0$ tel que $k \in]k^* - 2\varepsilon, k^* + 2\varepsilon[$ implique $f'(k) - \delta < n$. Puisque la fonction de production par tête est concave, on doit avoir



$$f(k) - f(k-\varepsilon) \leq \varepsilon f'(k-\varepsilon)$$

Considérons une trajectoire réalisable de référence $\{(c_t, k_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ qui converge vers k^*. Alors il existe une période t_0 telle que $k_t \in]k^* - \varepsilon, k^* + \varepsilon[$. Autrement dit, si t_0 est assez grand on peut arbitrairement rapprocher k_t de k^* (car $\lim_{t \to \infty} k_t = k^*$). Pour $t \geq t_0$

on a donc aussi

$$f'(k_t) - \delta < n$$

et

$$f'(k_t - \varepsilon) - \delta < n$$

Considérons une autre trajectoire réalisable $\{(\hat{c}_t, \hat{k}_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ telle que

(i) en période $t = t_0$ la conso est accrue par rapport à la trajectoire de référence $(\hat{c}_t > c_t)$ de sorte que $\hat{k}_{t_0+1} = k_{t_0} - \varepsilon$ (l'accroissement de la consommat° résulte en une diminution du stock de capital.

(ii) pour toute période $t > t_0$ on ait $\hat{k}_t = k_t - \varepsilon$.

On peut alors montrer que $\hat{c}_t > c_t$ pour tout $t > t_0$:

contrainte de ressource

$$\hat{c}_t = f(\hat{k}_t) + (1-\delta)\hat{k}_t - (1+n)\hat{k}_{t+1}$$

Point (iii)

$$= f(k_t - \varepsilon) + (1-\delta)(k_t - \varepsilon_t) - (1+n)(k_{t+1} - \varepsilon)$$

$$= f(k_t - \varepsilon) + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1} + (n+\delta)\varepsilon$$

concavité

$$\geq f(k_t) - \varepsilon f'(k_t - \varepsilon) + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1} + (n+\delta)\varepsilon$$

car $f'(k-\varepsilon) < n+\delta$

$$> f(k_t) - \cancel{\varepsilon(n+\delta)} + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1} + \cancel{(n+\delta)\varepsilon}$$

$$= f(k_t) + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1} = c_t$$

Il est donc possible, en réduisant le stock de capital, d'augmenter le niveau de consommation à toutes les périodes à partir de t_0. La trajectoire de départ, en ce sens, n'est pas efficiente.

Proposition 5 Toute trajectoire réalisable $\{(c_t, k_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{t \to \infty} k_t \leq k^*_{or}$ est dynamiquement efficiente.

Ainsi la trajectoire d'équilibre du modèle à générations imbriquées, comme nous l'avons vu dans l'exemple avec une fonct° d'utilité log et une fonction de production Cobb-Douglas, peut être inefficiente $\Rightarrow$ l'équilibre n'est pas forcément optimal au sens de Pareto. Cela arrive quand le taux d'intérêt à l'état stationnaire est trop faible ($r^* < n$, ou, s'il y avait du progrès technique comme dans le modèle de Solow, $r^* < n+g$).

Le premier théorème du bien être n'est pas vérifié ici. Même si nous sommes bien dans un environnement parfaitement concurrentiel, toutes les hypothèses de ce théorème ne sont pas vérifiés ici : l'économie contient un nombre infini d'agents (dont beaucoup ne peuvent pas échanger entre eux). Dans ce cadre un dictateur bienveillant pourrait atteindre une allocation des ressources plus satisfaisante pour tous, que le « marché » ne peut atteindre → Rôle pour l'état car le « laissez-faire » n'est pas optimal.

Si chaque jeune adulte abandonne une unité d'épargne pour la donner aux vieux à chaque période, alors chaque vieux recevra $1+n$ unités de consommation alors que l'épargne aurait rapportée $1+r$ aux jeunes devenus vieux. Si $r^* < n$, c'est-à-dire si nous sommes dans une situation de sur accumulation, ce transfert est « rentable » dans le sens où il augmente le niveau de la consommation de toutes les générations. Le libre marché ne peut pas implémenter cette réallocation. On peut montrer que c'est exactement ce type de transfert que pourrait mettre en oeuvre un dictateur bienveillant.

(5.4) Solution du dictateur bienveillant

Par construction l'allocation d'un dictateur bienveillant est Pareto optimale. Parfois cette allocation correspond à celle que nous obtiendrions dans une économie décentralisée, mais nous savons déjà que ce n'est pas le cas ici (dès lors que $r^* < n$ l'équilibre dynamique est inefficient). Dans ce dernier cas étudier l'allocation du dictateur bienveillant donne une référence utile.

Il nous faut définir l'objectif du dictateur bienveillant. Dans un modèle avec un agent représentatif c'est simple : puisque le dictateur est bienveillant, il cherche à maximiser le bien être (l'utilité) de l'agent représentatif. <u>MAIS</u> ici nous avons une hétérogeneité des ménages peuplant l'économie : il y a des jeunes et des vieux à différentes périodes.

On supposera que en période 0 le bien être social est donné par :

$$\tilde{W} = \underbrace{\beta u(c_{2,0})}_{\text{utilité des vieux en période 0}} + \sum_{t=0}^{T-1} (1+R)^{-t-1} \underbrace{\left[u(c_{1,t}) + \beta u(c_{2,t+1})\right]}_{\substack{\text{utilité intertemporelle} \\ \text{d'un individu naît} \\ \text{en période } t}}$$

Le paramètre d'escompte du planificateur R permet de pondérer les différentes générations dans le bien être social $\tilde{W}$.

Si $R > 0$ alors le dictateur accorde moins d'importance aux générations futures (d'autant moins qu'elles sont éloignées de la période 0). Si $R = 0$, alors le planificateur accorde une importance égale à chaque génération.

On suppose ici que le dictateur ne valorise pas les générations qui apparaîtront après la période T. On pourrait généraliser en faisant tendre T vers l'infini, mais cela entraînerait des complications techniques que nous éviterons ici.

Le dictateur bienveillant doit respecter la contrainte de ressource de l'économie (il ne peut pas faire n'importe quoi) :

$$(1+n)k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t + \underbrace{c_{1t} + (1+n)^{-1}c_{2,t}}_{c_t \text{ (voir page 31)}}$$

Le dictateur bienveillant cherche à maximiser le bien être social W sous la contrainte de ressource, sachant que

- k_0 est donné, il s'agit de la dotation initiale de l'économie en capital
- $k_{T+1} = 0$, la condition terminale doit être nulle si le dictateur ne valorise pas ce qu'il adviendra après la période T

Il ne serait pas optimal de laisser du capital à la fin de l'horizon de planification (autant le consommer).

Afin de caractériser le comportement du dictateur, nous allons substituer la contrainte de ressource dans le bien être social, en exprimant $c_{1,t}$ en fonction de $c_{2,t}, k_t$ et k_{t+1}, puis dériver la fonction objectif par rapport à $c_{2,t}$ et k_t.

En portant notre regard sur les termes qui contiennent $c_{2,t}$ ou k_t dans l'objectif, nous allons avoir :

$$\cdots + u(c_{1,t-1}) + \beta u(c_{2,t}) + (1+R)^{-1} u(c_{1,t}) + \cdots$$

$$= \cdots + u\left((1-\delta)k_{t-1} + f(k_{t-1}) - (1+n)k_t - (1+n)^{-1} c_{2,t-1}\right)$$
$$+ \beta u(c_{2,t})$$
$$+ (1+R)^{-1} u\left((1-\delta)k_t + f(k_t) - (1+n)k_{t+1} - (1+n)^{-1} c_{2,t}\right) + \cdots$$

Remarque nous avons simplifié par $(1+R)^{-t}$

Les conditions du premier ordre du dictateur bienveillant sont donc :

cno/c_2 $$\beta u'(c_{2,t}) - (1+R)^{-1}(1+n)^{-1} u'(c_{1t}) = 0 \qquad (A)$$

cno/k $$-(1+n)\, u'(c_{1,t-1}) + (1+R)^{-1}\left(1-\delta + f'(k_t)\right) u'(c_{1t}) = 0 \qquad (B)$$

La condition (A) concerne les utilités marginales des jeunes et des vieux qui vivent à la même période. La condition (B) ressemble (on y revient) à l'équation d'Euler.

La condition (statique) (A) nous dit que le TMS du dictateur (entre les consommations des jeunes et des vieux) doit être égal au TMT : $1+n$. Comme nous l'expliquions à la fin de la section précédente, si en toute période les jeunes décident d'abandonner une unité de consommation alors en toute période les vieux bénéficient de $1+n$ unités supplémentaires de consommation.

La seconde condition (B) est standard dans un modèle dynamique, elle relie les utilités marginales de jeunes adultes sur deux périodes consécutives. En réduisant la consommation d'une unité en période $t-1$, l'utilité diminue (approximativement) de $u'(c_{1,t-1})$, mais via l'accumulation du capital un accroissement de l'utilité en période t de $(1+n)^{-1}(1-\delta+f'(k_t))u'(c_{1t})$. A l'optimum du dictateur ce gain (escompté par $1+R$)

doit exactement compenser la perte en période $t-1$.

<u>Remarque 1</u> En combinant (A) et (B) on montre que l'on doit avoir :

$$u'(c_{1,t-1}) = \beta(1-\delta+f'(k_t))\,u'(c_{2,t})$$

nous retrouvons ici l'équation d'Euler dans le plan du dictateur bienveillant. Cela n'est pas surprenant, le dictateur maximise une somme pondérée des utilités intertemporelles des différentes générations, mais il respecte l'optimum individuel en allouant la consommation le long du cycle de vie comme le ferait un individu car il n'y a pas d'externalités dans cette économie.

Que pouvons nous dire de l'état stationnaire dans le modèle centralisé ?

Notons que dans ce modèle, l'horizon de planification étant fini (T), tout se passe comme si la durée de vie de l'économie était finie. Dès lors l'état stationnaire, s'il existe, ne peut avoir les mêmes propriétés que dans les sections précédentes. Dans la section 4, quand tout se passe bien, on a un état stationnaire unique globalement stable. Si l'économie est à l'état stationnaire elle y reste jusqu'à la fin des temps. Si elle n'est pas à l'état stationnaire, elle

converge vers l'état stationnaire.
Ici, même si l'économie converge vers un état stationnaire non trivial, elle ne peut y rester indéfiniment puisque la condition terminale du programme du dictateur est $k_{T+1} = 0$. Une façon de résoudre ce « problème » est de faire tendre l'horizon de planification vers l'infini : $T \to \infty$ (en s'assurant que l'objectif du dictateur, rappelons qu'il s'agit d'une somme infinie d'utilités pondérées, reste défini).

A l'état stationnaire, nous devons avoir :

$$\begin{cases} \beta u'(c_2^*) = (1+R)^{-1}(1+n)^{-1}u'(c_1^*) & (C) \\ 1-\delta+f'(k^*) = (1+R)(1+n) & (D) \end{cases}$$

La seconde condition (D) détermine l'état stationnaire du stock de capital :

$$(D) \iff f'(k^*) - \delta = R + n + Rn$$

Si les taux n et R sont assez faibles on peut approximer par :

$$\underbrace{f'(k^*) - \delta}_{r^*} = \underset{\uparrow}{R} + n$$

Il s'agit de la règle d'or modifiée (à cause de la présence du paramètre R)

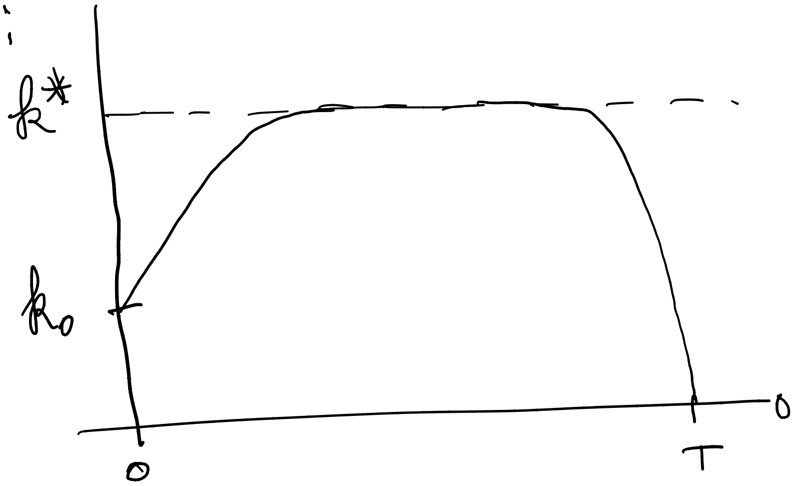
Si le dictateur bienveillant donne un poids égale à toutes les générations, c'est-à-dire si $R=0$, alors on obtient :

$$f'(k^*) - \delta = n$$

on retrouve la règle d'or (non modifiée). Quand le dictateur ne favorise pas certaines générations l'état stationnaire de son plan est la règle d'or (qui maximise la consommation par tête). Dès lors que $R>0$, c'est-à-dire dès lors que le dictateur accorde moins d'importance aux générations les plus éloignées dans le temps, le niveau d'état stationnaire du capital diminue (puisque la productivité marginale du capital est une fonction décroissante de k).

$\Rightarrow$ Le dictateur ne choisit jamais une trajectoire inefficiente (l'état stationnaire est $< k^*_{or}$ tant que R est non négatif).

On peut montrer, nous ne le ferons pas car c'est techniquement difficile, que l'économie dirigée par le dictateur bienveillant converge vers l'état stationnaire de la règle d'or modifiée (pour toute condition initiale k_0 sous les conditions habituelles) puis converge vers 0 quand on se rapproche du terme de l'horizon de planification :



Si $R \geq 0$, on peut faire tendre l'horizon de planification vers ∞ (attent° quand $R=0$, le bien être n'st pas fini mais on peut montrer par un argument limite que le programme du planificateur garde quand même un sens). Dans ce cas l'économie converge, comme dans la section 4, vers un état stationnaire qui correspond à la règle d'or modifiée et y reste indéfiniment, où à la règle d'or si $R=0$.