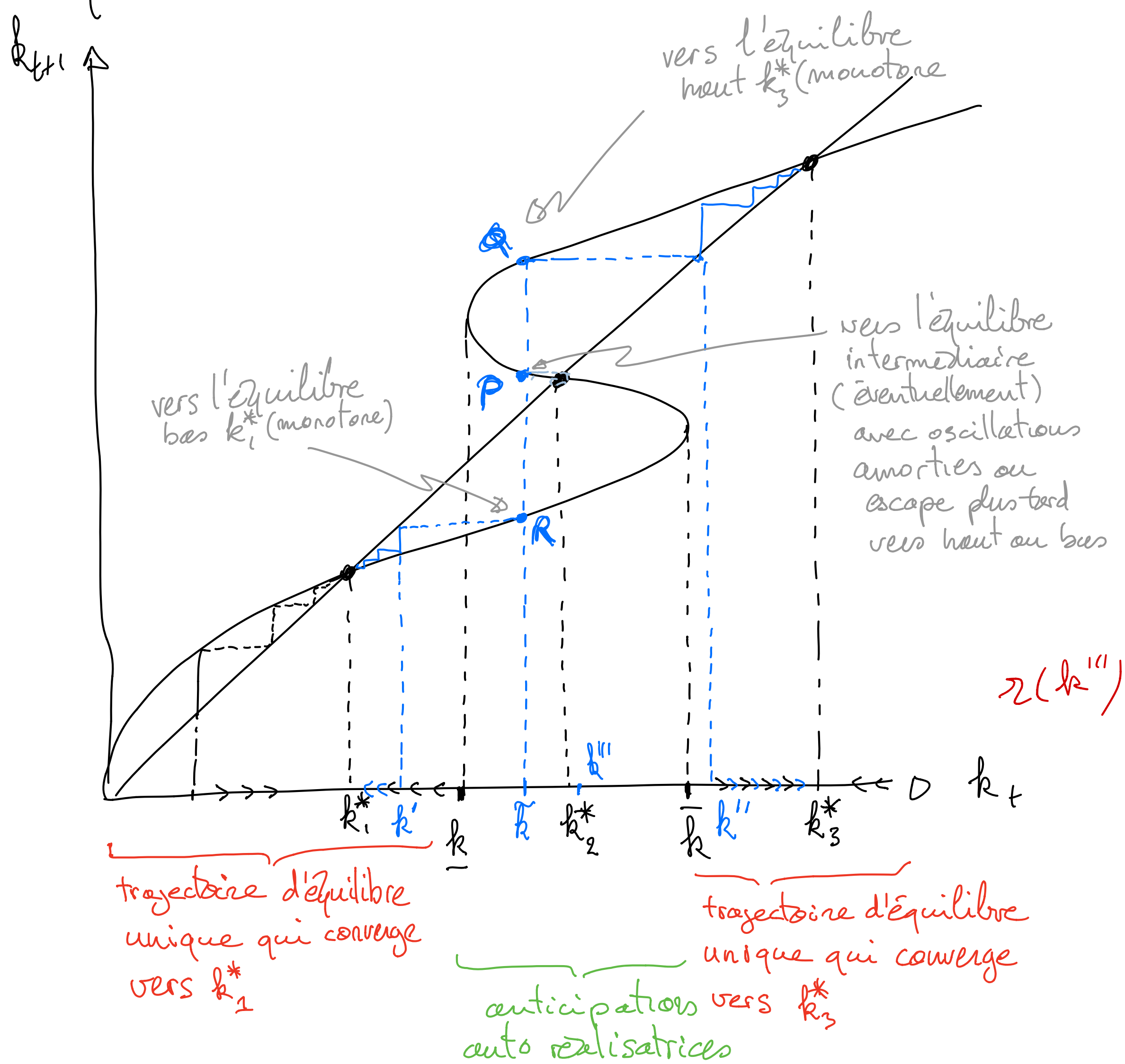
Si la pente de la courbe de transition n'est pas toujours positive, alors l'unicité de la trajectoire d'équilibre n'est plus assurée, pour certaines valeurs de k (là où la courbe est décroissante) les anticipations peuvent être autoréalisatrices et donner naissance à plusieurs trajectoires d'équilibre.



50

Si $k \notin [\underline{k}, \bar{k}]$ alors l'équilibre dynamique est unique, on se dirige soit vers k_1^* (si $k < \underline{k}$) soit vers k_3^* (si $k > \bar{k}$). Ces deux états stationnaires sont localement stables, et les trajectoires d'équilibre sont monotones.

Si $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ il n'y a pas unicité de la trajectoire d'équilibre. Dans cette région la pente de courbe de transition est négative, et c'est précisément ce qui donne lieu à des anticipations auto réalisatrices.

Supposons que l'économie soit initialement en $\tilde{k}$.

Si les jeunes ménages anticipent $r_{t+1}^e = r(k''')$, on se situe donc sur le point P de la courbe de transition, alors ce taux d'intérêt va effectivement se réaliser.

$r = f'(k)$

Mais en partant du même état $\tilde{k}$, les jeunes pourraient tout aussi bien anticiper un taux d'intérêt plus faible $r_{t+1}^e = r(k')$, le point Q, qui se réalisera aussi puisque nous sommes toujours sur la courbe de transition. L'existence de cette alternative est précisément possible parce que l'épargne dépend (assez) négativement du taux d'intérêt anticipé. En anticipant un taux d'intérêt plus faible, cela augmente l'épargne juste assez pour que k_{t+1} soit égal à k'' et que donc le taux d'intérêt soit égal à $r(k'') < r(k''')$, confirmant ainsi l'anticipation.

Une autre alternative serait d'anticiper un taux d'intérêt plus élevé. Ce qui contribuerait à réduire l'épargne, donc le capital ce qui est cohérent avec une augmentation du taux d'intérêt.

Dans cette illustration si on va vers Q l'économie se dirige ensuite vers l'état stationnaire haut, si on va vers R l'économie se dirige ensuite vers l'état stationnaire bas. Si la branche P est choisie on peut se diriger vers l'état stationnaire intermédiaire avec des oscillations amorties ou à tout moment s'échapper vers les deux autres états stationnaires en adoptant des hypothèses plus faibles ou élevées pour le taux d'intérêt futur.

La possibilité d'anticipations auto réalisatrices pose plusieurs problèmes :

① Le pouvoir prédictif du modèle, MAIS SURTOUT

② le problème de coordination des anticipations

Si plusieurs anticipations sont possibles dans un modèle à anticipat° parfaite, comment les jeunes font pour se coordonner sur la même anticipations ?

Même s'il peut être parfois intéressant de travailler sur un modèle où les anticipations peuvent être autoréalisatrices/ par exemple pour expliquer la possibilité de crises ou de bulles indépendemment des fondamentaux de l'économie), tout cela pointe finalement les limites de l'hypothèse d'anticipation parfaite.

<u>Solutions possibles</u>:

- Abandonner les anticipations parfaites pour des anticipations myopes ou adaptatives
- Choisir des préférences et technologies (avec les bonnes paramétrisations) qui permettent d'éliminer les équilibres multiples
- Augmenter le nombres de periodes...

Pour que la pente, $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$, soit positive il faut que

$$S_r\left(w(k_t), r(k_{t+1})\right) > \frac{1+n}{f''(k_{t+1})}$$

tout le long de la trajectoire d'équilibre.
Une condition suffisante est que $S_r > 0$, ~~que~~ que l'épargne augmente quand le taux d'intérêt anticipé augmente, c'est-à-dire que l'élasticité de l'utilité marginale soit faible (l'effet revenu sur c_1 ne domine pas l'effet substitution).

- On retient donc qu'avec une fonction d'utilité CRRA la trajectoire d'équilibre est unique si $\sigma \leq 1$.

- On peut montrer que même avec $\sigma > 1$ la trajectoire d'équilibre peut être unique si la fonction de production est de type CES :

$$f(k) = \left(\alpha k^{\gamma} + 1 - \alpha\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

avec $\alpha \in]0,1[$ et $\gamma < 1$, et si l'élasticité de substitution entre les facteurs n'est pas trop faible au sens où :

$$\frac{1}{1-\gamma} > \frac{1-\frac{1}{\sigma}}{1+(1+\rho)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(1+f'(k)-\delta\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}$$

pour tout k. Cette condition est satisfaite dès lors que $\frac{1}{1-\gamma} > 1-\frac{1}{\sigma}$.

La fonction de production Cobb-Douglas (élasticité de substitution égale à 1, c'est-à-dire $\gamma = 0$) satisfait cette condition puisque $\sigma > 0$.

(4.4) Anticipations myopes

Nous pourrions abandonner l'hypothèse de prévisions parfaites en adoptant des prévisions myopes. Cela permettrait d'exclure le phénomène d'anticipations autoréalisatrices, mais pas toute forme de bizarrerie.

Avec des anticipations myopes, un jeune adulte en période t anticipe que la rémunération de l'épargne en période $t+1$ sera celle qu'il observe en $t+1$:

$$r_{t+1}^e = r_t \neq r_{t+1}$$

En substituant cette hypothèse dans la fonction d'épargne, et sachant que r_t est une fonction de k_t déterminée à l'équilibre, on peut réécrire la loi d'évolution du stock de capital par tête sous la forme :

$$k_{t+1} = \frac{s(w(k_t), r(k_t))}{1+n} \equiv m(k_t)$$

où $m(k)$ est une fonction continue.

Ainsi nous obtenons directement une équation récurrente pour k sous la forme d'une fonction. C'est parce que um() est une fonction que nous pouvons exclure les anticipations auto-réalisatrices, et assurer l'unicité de la trajectoire d'équilibre.

Par construction de l'état stationnaire, les états stationnaires non triviaux sont identiques sous les hypothèses d'anticipations parfaites ou myopes :

$$k^* = \frac{s(w(k^*), r(k^*))}{1+n}$$

Néanmoins les dynamiques d'équilibre peuvent être très différentes.

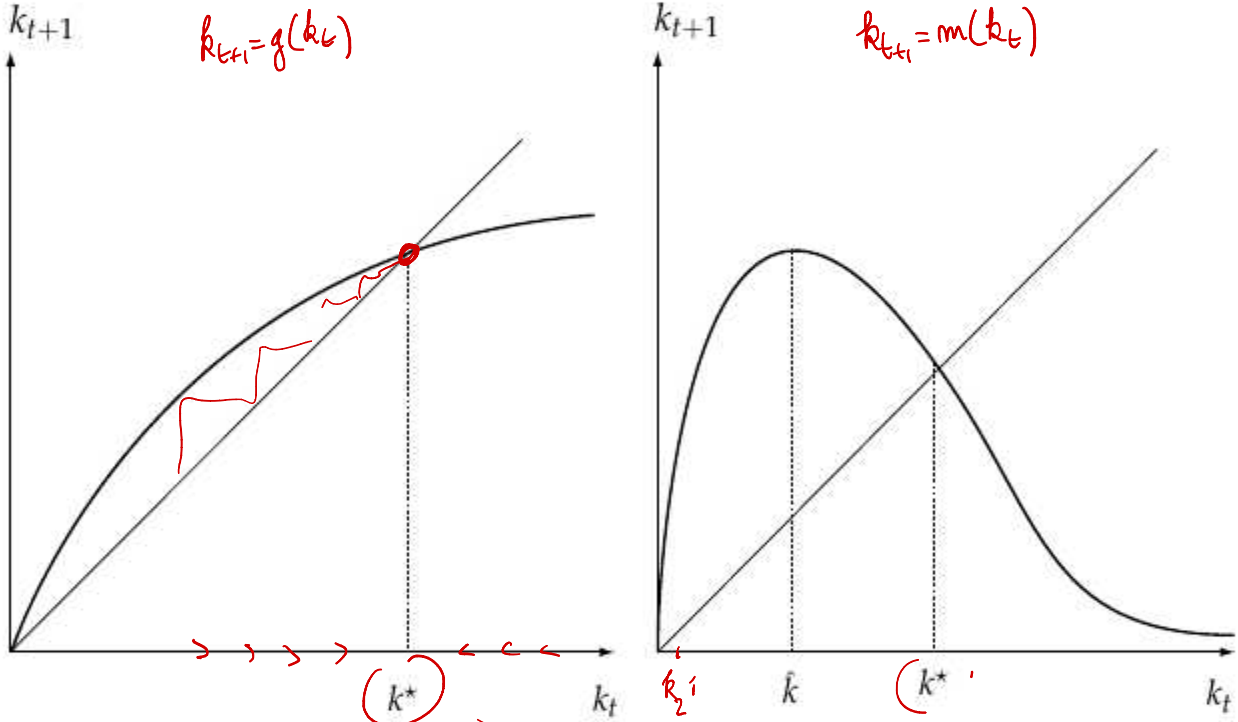


Figure 1.16. Rational and myopic dynamics for $\gamma > \alpha$. The two dynamics with perfect and myopic foresight have the same positive steady state $k^\star$ (which is unique with a Cobb–Douglas production function and a CIES utility function). $k^\star$ is stable for the rational dynamics, and the trajectory is monotonic. $k^\star > \hat{k}$ can be stable or unstable for the myopic dynamics, and the trajectory is oscillating near $k^\star$.

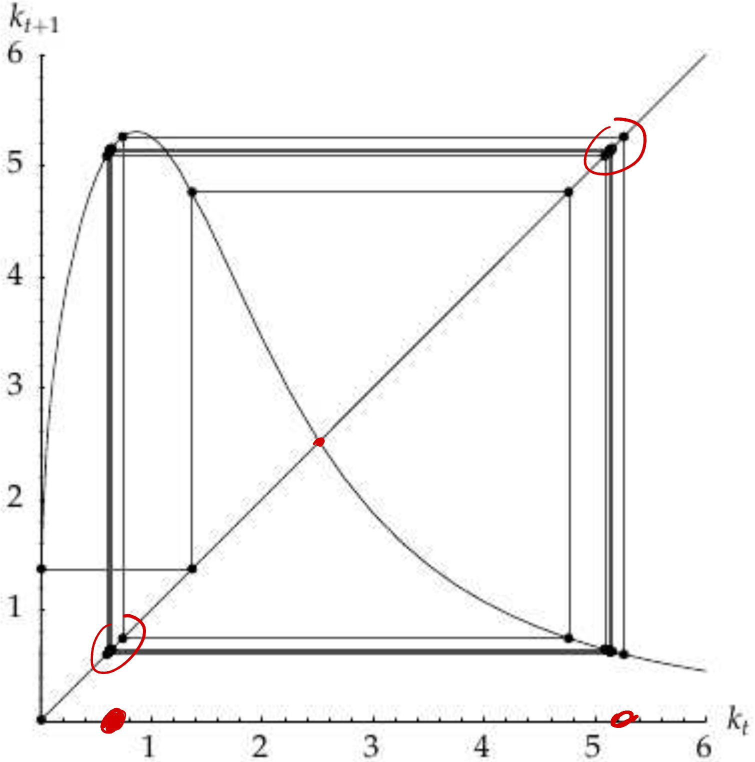


Figure 1.18. Dynamics of capital with a 2-cycle ($\sigma = 5$).

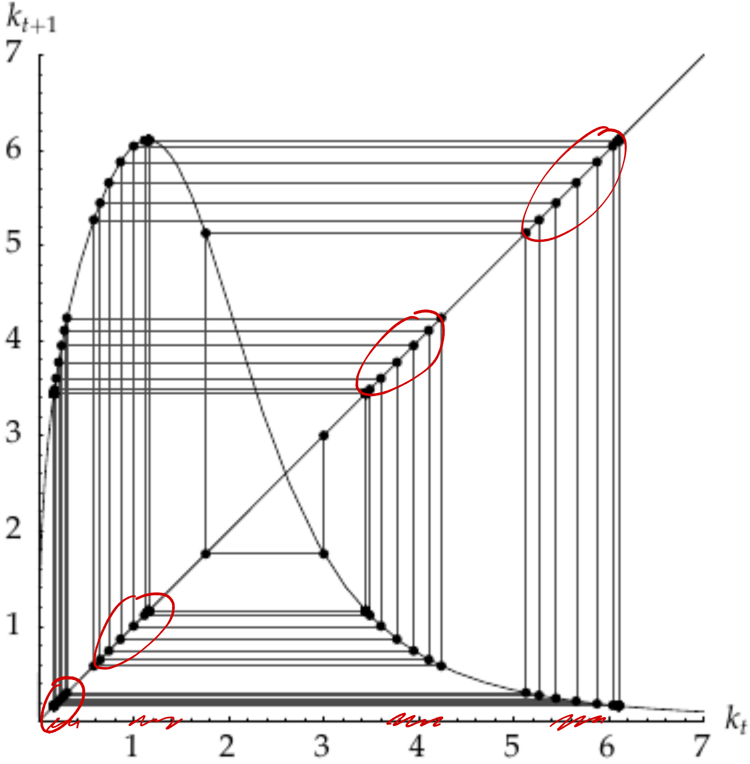


Figure 1.19. Dynamics of capital with a 4-cycle ($\sigma = 7$).

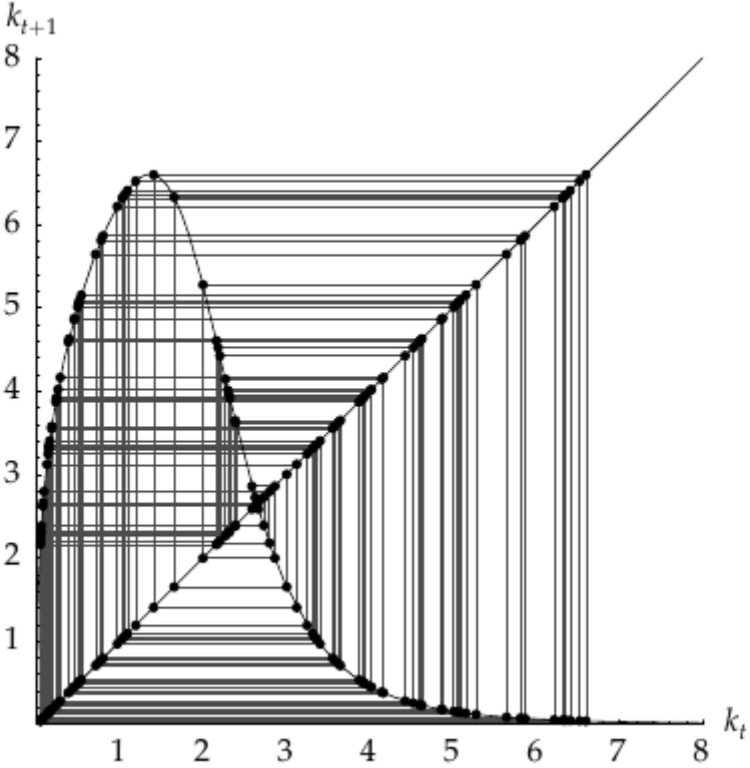


Figure 1.20. Dynamics of capital with chaos ($\sigma = 9$).

→ Même avec des formes fonctionnelles (pour les préférences et la technologie) standard on peut obtenir des trajectoires d'équilibre oscillatoires voire chaotiques.

Néanmoins, avec des anticipations myopes, ces trajectoires sont toujours uniques -

Même si la trajectoire ne converge pas vers un état stationnaire, pour une condition initiale donnée il n'existe qu'une seule trajectoire pour k (et les autres variables du modèle)

Pour la suite du chapitre on revient sur les anticipations parfaites.

(4.5) Caractérisation quantitative de la dynamique de transition

Supposons que le modèle soit tel qu'il n'existe qu'un seul état stationnaire non trivial et que celui-ci soit globalement stable.

Nous avons vu en TD que nous sommes dans cette situation si la fonction d'utilité est logarithmique et si la fonction de production est Cobb-Douglas. Dans ce cas la dynamique (qualitativement proche de celle que nous observons dans le modèle de Solow) est de la forme :

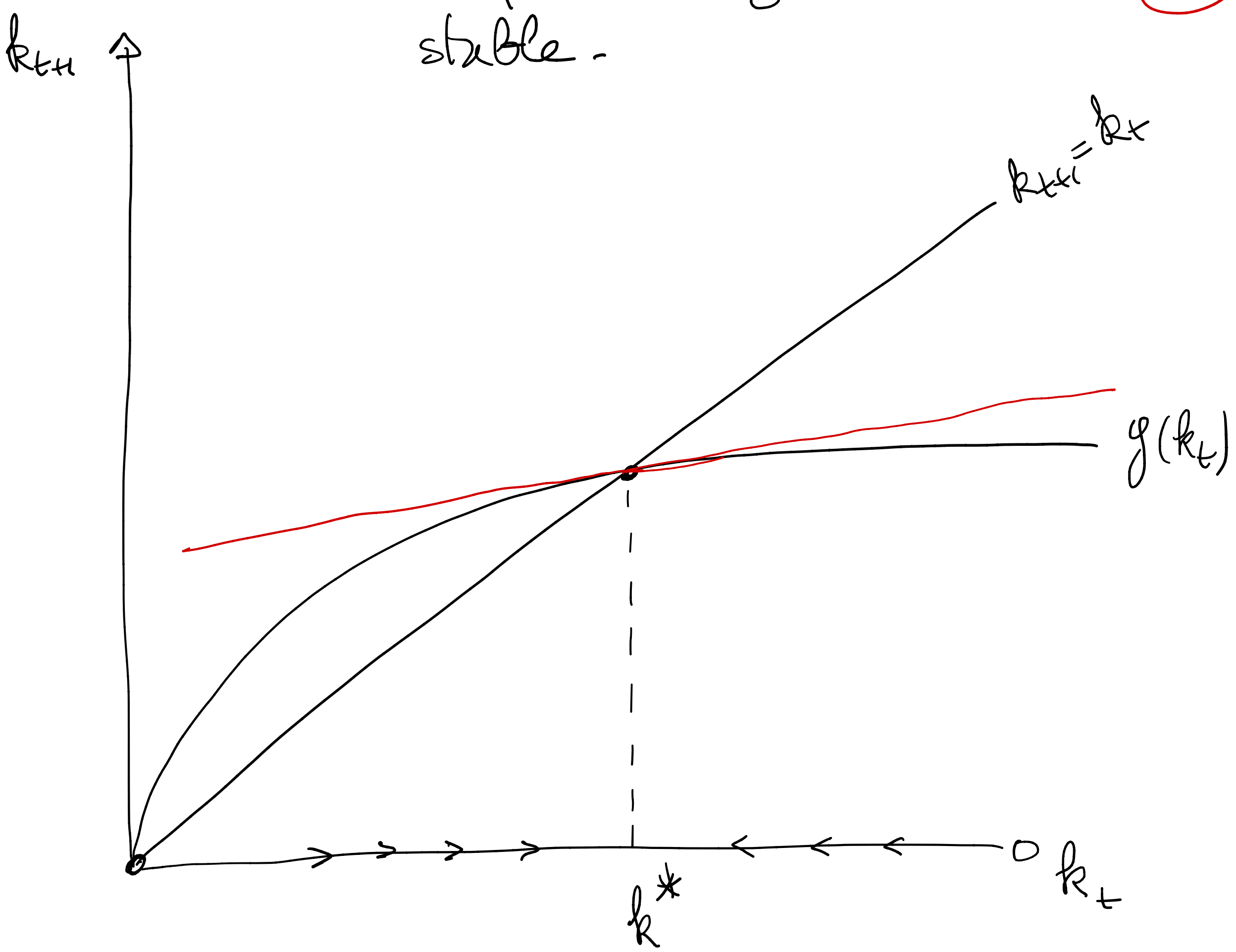
$u(c) = \log c$
$f(k) = k^{\alpha}$

$$k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \cdot k_t^{\alpha}$$

et l'état stationnaire pour le capital par tête est

$$k^* = \left(\underbrace{\frac{\beta}{1+\beta}}_{s\,:\ \text{le taux d'épargne}} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Unique $k^*>0$ globalement stable.



Pour caractériser la dynamique de transition vers l'état stationnaire, on peut, comme dans le modèle de Solow, calculer la vitesse de convergence.

$k_{t+1}=\varphi(k_t)$

Posons $\varphi(k) = \frac{\beta}{1+\beta}\cdot\frac{1-\alpha}{1+n}\cdot k^{\alpha}$ la fonction définissant la recurrence sur k.

On peut approximer celle-ci dans un voisinage de l'état stationnaire

$$\varphi(k) \simeq \varphi(k^*)+\varphi'(k^*)(k-k^*)$$

61

Par définition de l'état stationnaire on a

$$\varphi(k^*) = k^*$$

et donc

$$\varphi(k) \simeq k^* + \varphi'(k^*)(k-k^*)$$

Par ailleurs

$$\varphi'(k) = \alpha \cdot \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \cdot k^{\alpha-1}$$

et donc

$$\varphi'(k^*) = \alpha \cdot \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(k^*) = \alpha \cdot \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1-\alpha}{1+n} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot \frac{1+n}{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(k^*) = \alpha$$

Ainsi, on peut approximer la dynamique dans un voisinage de l'état stationnaire par :

$$k_{t+1} \simeq k^* + \alpha(k_t - k^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad k_{t+1} - k^* = \alpha\,(k_t - k^*)$$

En itérant vers le passé on obtient :

$$k_t - k^* = \alpha^t\,(k_0 - k^*)$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, quand t tend vers l'infini l'écart à l'état stationnaire tend bien vers 0, et cette convergence est monotone.

La vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire ne dépend que de α, l'élasticité de y/k. Ce paramètre, qui correspond aussi à la part de la rémunération du capital dans le revenu total, est habituellement étalonné autour de 1/3. Ainsi à chaque période la distance à l'état stationnaire est réduite de 2/3. $1-\alpha = 2/3$ est la vitesse de convergence. Dans ce modèle, la vitesse d'ajustement ne dépend pas de n (le taux de croissance de la population) et de δ (le taux de dépréciation) comme dans le modèle de Solow, où, pour mémoire, on a :

$$\beta = (1-\alpha)(n+\delta).$$

On voit donc que la vitesse d'ajustement est plus forte dans le modèle AK que dans le modèle de Solow (tant que $n+\delta < 1$).