Mais les vieux meurent quand même de faim puisqu'ils ne peuvent pas se nourrir sur le capital. ∎

(4.3) Equilibre dynamique

L'equilibre temporaire décrit dans la section précédente requiert (i) les jeunes ménages et les firmes optimisent étant données leurs anticipations et les contraintes auxquelles ils sont exposés, (ii) les marchés sont apurés.

À aucun moment on ne s'interroge sur la différence éventuelle entre le taux d'intérêt anticipé et celui qui va effectivement se réaliser.

Un équilibre dynamique est une suite d'équilibres temporaires telle que les anticipations des agents sont vérifiées à chaque période.

Définition 3 Une trajectoire d'équilibre est une trajectoire réalisable $\{(k_t, c_{1t}, c_{2t})\}_{t=0}^{\infty}$ telle que $\forall t \in \mathbb{N}$ l'état $(k_t, c_{1t}, c_{2t}, w_t, r_t)$ est un équilibre temporaire avec $r_{t+1}^e = r(k_{t+1})$

On sait que le stock de capital en période $t+1$ vient de l'épargne des jeunes en période t, c'est-à-dire que :

$$K_{t+1} = s_t L_t$$

$$\Longleftrightarrow \quad k_{t+1} L_{t+1} = s_t L_t$$

Le long de la trajectoire d'équilibre on doit donc avoir :

$$k_{t+1} = \frac{s(w(k_t), r(k_{t+1}))}{1+n} \qquad (6)$$

en utilisant le comportement optimal des jeunes qui nous dit que $s_t = (w_t, r^e_{t+1})$, le comportement optimal des firmes qui implique $w_t = w(k_t)$, et la cohérence des anticipations et des réalisations qui impose $r^e_{t+1} = r_{t+1} = r(k_{t+1})$.

L'équation (6) est l'équation fondamentale du modèle de Diamond.

Proposition 2

(i) $\forall\, k_0 > 0$ il existe au moins une trajectoire d'équilibre.

(ii) Si $k_0 = 0$, une trajectoire d'équilibre existe ssi $f(0) > 0$

(iii) Le long de la trajectoire d'équilibre le salaire est positif en toute période, et le capital est toujours positif sauf éventuellement en première période

(iv) La trajectoire d'équilibre satisfait la récurrence (6)

Preuve On commence par montrer que si $w > 0$ alors l'équation

$$\frac{s(w, r(k))}{k} = 1+n$$

admet au moins une solution $k > 0$.

Par hypothèse le membre de droite est strictement positif, $1+n > 0$.

Nous savons que la fonction d'épargne optimale est telle que

$$0 < s(w, r(k)) < w$$

Ainsi, pour tout $k > 0$, on doit avoir

$$0 < \frac{s(w, r(k))}{k} < \frac{w}{k}$$

Clairement lorsque k tend vers l'infini, le ratio sur la droite doit tendre vers 0. L'épargne par unité de capital est donc alors encadré par zéro et on a :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s(w, r(k))}{k} = 0$$

Considérons maintenant le cas polaire $k \to 0$. On distingue alors trois cas :

1. $\lim_{k\to 0} s(w, r(k)) > 0$, alors on a nécessairement

$$\lim_{k\to 0} \frac{s(w, r(k))}{k} = +\infty$$

2. $\lim_{k\to 0} s(w, r(k)) = 0$, nous avons alors une forme indéterminée.

   Nous savons dans ce cas que le taux d'intérêt réel doit tendre vers ∞ puisque la productivité marginale du capital tend vers l'infini lorsque le capital tend vers 0 :

$$\lim_{k\to 0} r(k) = +\infty$$

   Par ailleurs, nous savons que la consommation d'un vieux est donnée par :

$$c_2 = s(w, r(k)) \times (1 + r(k)) \equiv \varphi(w, k)$$

   Nous avons donc

$w(k) = f(k) - kf'(k)$

$$\frac{s(w, r(k))}{k} = \frac{\varphi(w, k)}{k(1+r(k))}$$

$(1-\delta)k + f'(k)k$

$\downarrow$

0

- $\lim_{k\to 0} k(1+r(k)) = \lim_{k\to 0} kf'(k)$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to 0} k(1+r(k)) = f(0) - w(0)$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to 0} k(1+r(k)) = 0$

41

- Pour le comportement limite du numérateur, on revient à l'équat° d'Euler qui peut s'écrire sous la forme

$$u'(c(w,k)) = (1+\rho)\frac{u'(w - s(w,r(k)))}{1+r(k)}$$

Nous savons que l'utilité marginale en seconde période, le membre de gauche, est non négatif. On a

$$\lim_{k\to 0} u'(c(w,k)) = (1+\rho)\lim_{k\to 0}\frac{u'(w-s(w,r(k)))}{1+r(k)}$$

Puisque nous sommes dans le cas où $\lim_{k\to 0} s(w,r(k))=0$

$$= (1+\rho)\lim_{k\to 0}\frac{u'(w)}{1+r(k)}$$

Puisque $\lim_{k\to 0} r(k) = +\infty$

$$= 0$$

Ainsi, puisque l'utilité marginale ne devient nulle que lorsque la conso tend vers l'infini, nous devons donc avoir :

$$\lim_{k\to 0} c(w,r(k)) = +\infty$$

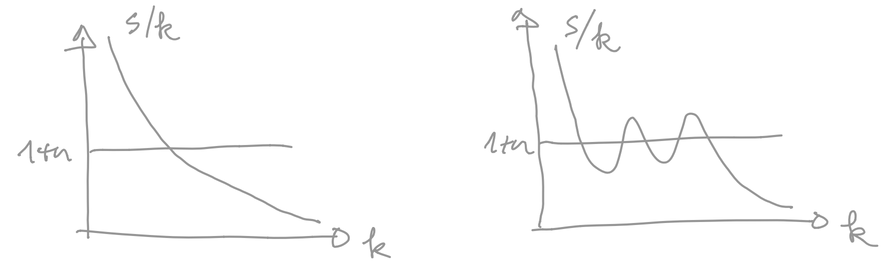
Dans les deux cas, $\lim_{k\to 0} s(w,r(k))=0$ et $\lim_{k\to 0} s(w,r(k))>0$, nous avons donc

$$\lim_{k\to 0}\frac{s(w,r(k))}{k} = +\infty$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$ l'épargne par unité de capital prend des valeurs entre $+\infty$ et 0. De plus nous savons que $\frac{s(w, r(k))}{k}$ est une fonction continue sur le même intervalle. Il existe au moins un $k>0$ tel que

$$\frac{s(w, r(k))}{k} = 1+n$$

comme annoncé.



Soit $k_t > 0$ un niveau de capital arbitraire en période t. On sait que $w_t = w(k_t)$ est strictement positif. Le résultat précédent nous dit qu'il existe une solution k à l'équation

$$k = \frac{s(w_t, r(k))}{1+n}$$

On pose alors $k_{t+1} = k$, et on itère... Il existe donc au moins une trajectoire d'équilibre.

Représentons graphiquement la dynamique dans le plan (k_t, k_{t+1}). La proposition 2 nous dit que :

$$k_{t+1} = \frac{s(w(k_t), r(k_{t+1}))}{1+n}$$

? qui peut définir implicitement une équation récurrente de la forme $k_{t+1} = \varphi(k_t)$. Pour la représentation graphique il convient de s'interroger sur la forme de φ. On a

$$dk_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left\{ s_w\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) w'(k_t)\, dk_t + s_r\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) r'(k_{t+1})\, dk_{t+1} \right\}$$

et donc :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{1}{1+n}\left\{ s_w\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) w'(k_t) + s_r\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) r'(k_{t+1}) \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{s_w\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) w'(k_t)}{1+n - s_r\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) r'(k_{t+1})}$$

en supposant que $s_r\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) r'(k_{t+1}) \neq 1+n$.

Le numérateur est forcément positif puisque $s_w > 0$ et $w'(k) = -k f''(k) > 0$. Ainsi le signe de la pente est déterminé par le signe du dénominateur et on a :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} \geq 0 \Leftrightarrow s_r\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) r'(k_{t+1}) \leq 1+n$$

$$\Leftrightarrow s_r\big(w(k_t), r(k_{t+1})\big) \geq \frac{1+n}{r'(k_{t+1})}$$

puisque $r'(k) = f''(k) < 0$.

Clairement si $s_r \geq 0$ alors la pente est forcément positive. Autrement dit si l'élasticité de l'utilité marginale est assez faible alors la pente est positive.

INTUITION

On remarque que $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} \neq 0$ puisque le numérateur est strictement positif.

On a :

où Δx_t est une petite variation de x_t (par l'opérateur différence première)

$$\left(1+n-s_r \cdot r'(k_{t+1})\right)\Delta k_{t+1} \simeq \underbrace{s_w \cdot w'(k_t)\Delta k_t}_{>0} \quad (*)$$

Considérons une petite variation positive de k_t, $\Delta k_t > 0$.

- $\nearrow k_t \Rightarrow \nearrow w$ — $w'(k) > 0$

  $\Rightarrow \nearrow s$ — $s_w > 0$

  $\Rightarrow \nearrow k_{t+1}$

- Mais dans le même temps l'augmentation de k entraîne une baisse du taux d'intérêt. On distingue alors plusieurs cas :

  ① Si $s_r = 0$ (élasticité de l'utilité marginale égale à 1) alors la tendance à l'augmentation de k_{t+1} n'est pas affectée.

② Si $s_r > 0$ (élasticité de l'utilité marginale inférieure à 1) alors l'effet à la hausse de k_{t+1} est réduite car l'épargne baisse quand le taux d'intérêt diminue. Notons que l'effet sur k_{t+1} est toujours positif car si k n'augmente pas il n'y a pas de raison que le taux d'intérêt baisse.

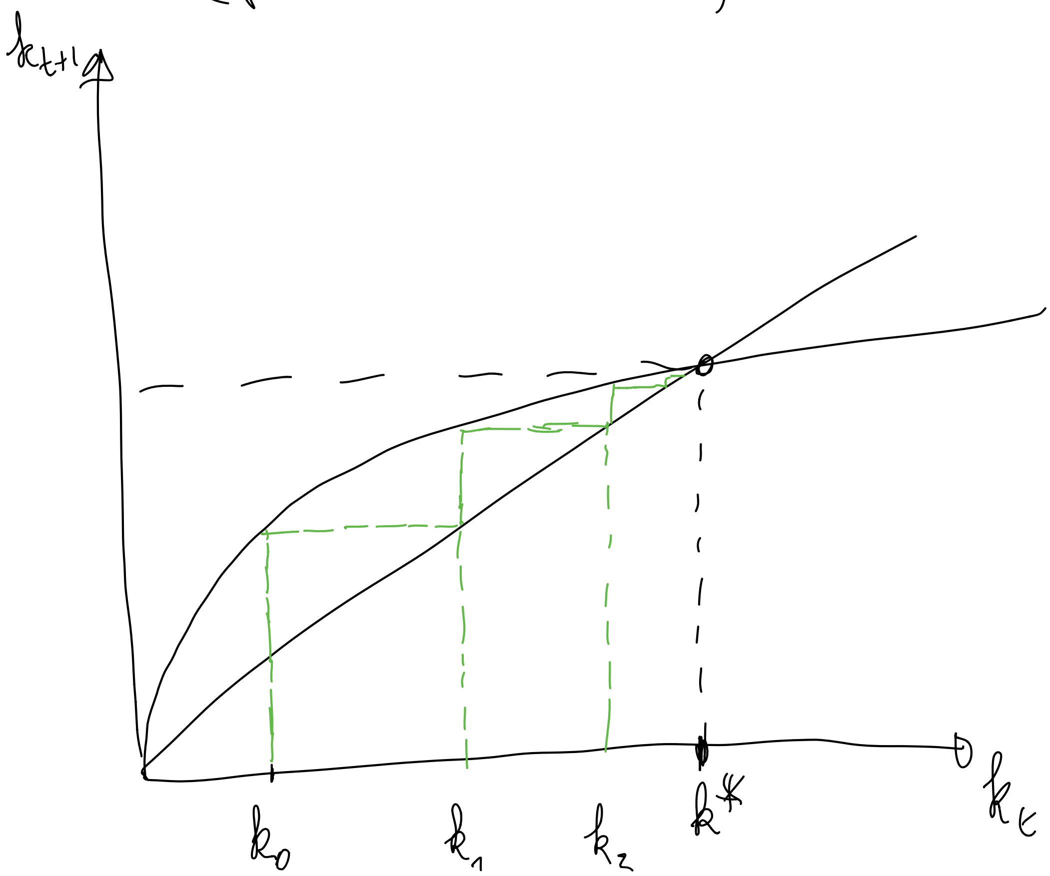
③ Si $\frac{1+n}{r'(k_{t+1})} < s_r < 0$ alors la tendance à l'augmentation de k_{t+1} est renforcée par l'augmentation de l'épargne induite par la baisse du taux d'intérêt.

④ Si $s_r < \frac{1+n}{r'(k_{t+1})} < 0$ alors

$$1+n - s_r \cdot r'(k_{t+1}) < 0$$

et puisque le membre de droite est positif, il faut que Δk_{t+1} soit négatif.

Le cas idéal
(proche de Solow)

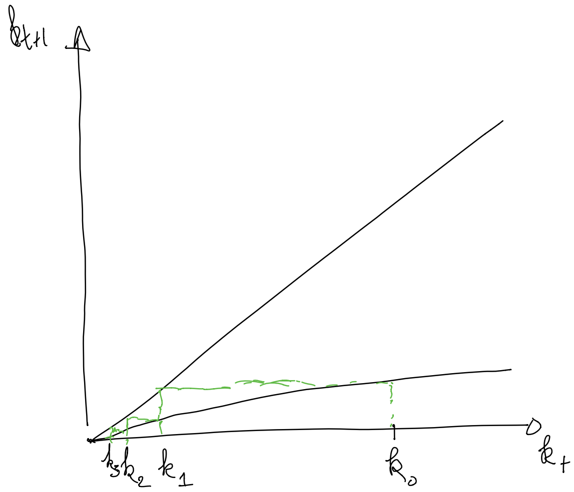


Si $k_0 > 0$ il existe dans ce cas une unique trajectoire d'équilibre menant vers un unique état stationnaire $k^* > 0$ qui vérifie

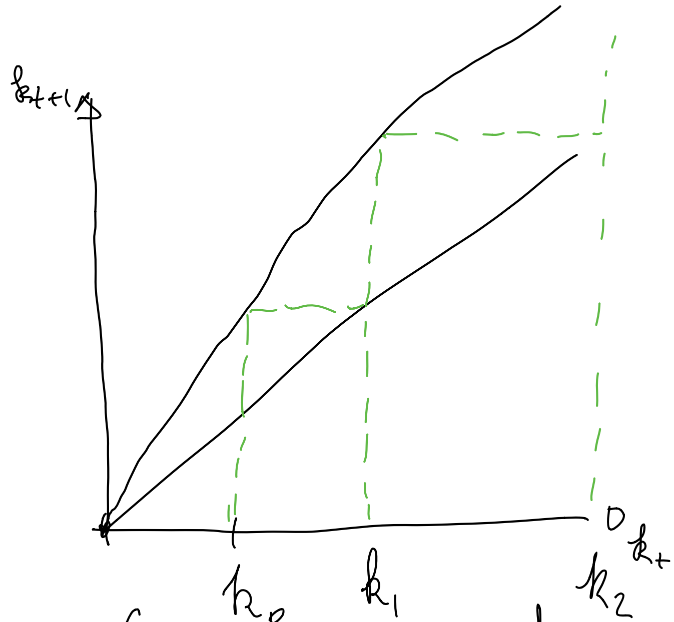
$$k^* = \frac{s(w(k^*), r(k^*))}{1+n}$$

Dans ce cas la pente de la courbe de transition, $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$, est toujours positive.
Mais même avec une pente positive partant on peut obtenir des dynamiques

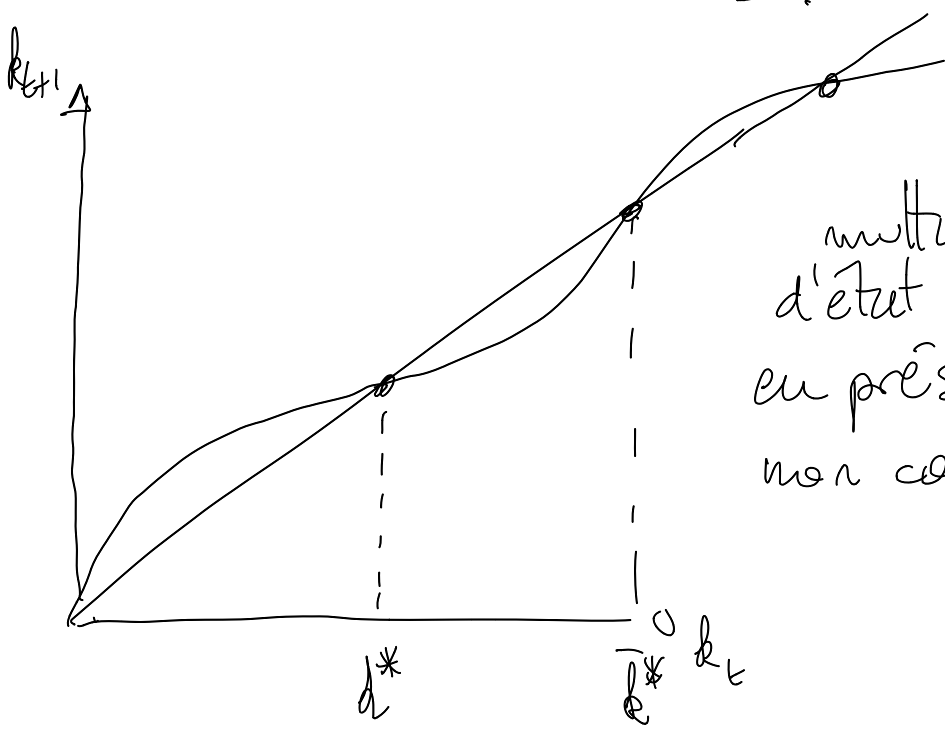
plus exotiques :



l'économie disparaît à long terme si la courbe de transition est toujours sous la première bissectrice.



Croissance endogène si la courbe de transit° est toujours au dessus de la première bissectrice, par exemple parce que sa pente est toujours supérieure à 1.



multiplicité d'état stationnaire en présence de non convexités

Notons que dans tout ces cas, on a toujours une unique trajectoire d'équilibre pour toute condition initiale $k_0 > 0$.

On remarque que, même si nous sommes dans une situation où l'unicité de la trajectoire d'équilibre est assurée (dk_{t+1}/dk_t toujours positif), l'existence d'un état stationnaire n'a rien d'évident. Pour s'assurer de son existence il faut :

(i) Que la pente de la courbe de transition (dk_{t+1}/dk_t) soit supérieure à 1 en zero. Mais nous n'avons pas envie de formuler une hypothèse sur un résultat du modèle... Et on ne sait pas dériver les hypothèses nécessaires sur les fondamentaux du modèle (préférence et/ou technologie) pour que cela soit le cas.

(ii) Supposer qu'il soit possible de produire sans capital, ie $f(0) > 0$. Dans ce cas il est possible de montrer qu'il existe nécessairement un état stationnaire.