En effet, si l'épargne est neutre vis-à-vis du taux d'intérêt, alors cela implique que c_{1t} sera aussi non affecté par une augmentation de r_{t+1}. On sait, via la contrainte budgétaire de seconde période, que $c_{2,t+1}$ va augmenter du même pourcentage que $1+r_{t+1}$. Pour rester sur l'équation d'Euler il faut que l'élasticité soit unitaire de sorte que l'utilité marginale de seconde période baisse du même pourcentage (en valeur absolue) que $1+r_{t+1}$.

Les estimations sur données concluent généralement que l'élasticité de l'utilité marginale, σ, est plus grande que 1.

$\hookrightarrow$ L'effet revenu domine l'effet substitut°

$\Rightarrow$ Une augmentation du taux d'intérêt induit une baisse de l'épargne.

(3) Comportement des producteurs

Tout se passe comme dans le modèle de Solow, chapitre I. Les firmes utilisent toutes la même fonction de production néoclassique

$$Y = F(K, L)$$

qui peut s'écrire sous forme intensive :

$$y = f(k)$$

car F est homogène de degré un. La product° par tête vérifie

$$f'(k) \geq 0, \quad f''(k) < 0 \quad \forall k$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$$

Toutes les firmes sont identiques, adoptent les mêmes comportement, nous pouvons donc raisonner sur la base d'une firme représentative. Celle-ci prend les prix

- w_t : le salaire réel par unité de travail
- $\hat{r}_t$: le prix pour utiliser une unité de capital.

comme donnés, et détermine ses demandes en capital (K_t^d) et en travail (L_t^d) de façon à maximiser son profit.

À cause de l'hypothèse de rendements d'échelle constants, le programme de la firme ne détermine que le ratio capital travail, qui doit satisfaire :

$$\begin{cases} f'(k_t^d) = \hat{r}_t \\ f(k_t^d) - k_t^d f'(k_t^d) = w_t \end{cases}$$

Les niveaux de K_t^d et L_t^d ne sont pas déterminés.

<u>Remarque 1</u> La firme paye $\hat{r}_t$ pour chaque unité de capital, mais le capital détenu par les vieux se déprécie au taux $\delta \in [0,1]$. Pour chaque unité de capital louée à la firme représentative, un vieux perçoit donc $\hat{r}_t - \delta$ qui est le rendement de l'épargne r_t.

<u>Equilibre</u> À l'équilibre des marchés des facteurs, l'offre de capital (K_t) doit égaliser la demande de capital (K_t^d) et l'offre de travail (L_t) doit égaliser la demande de travail (L_t^d) :

$$K_t^d = K_t$$
$$L_t^d = L_t = L_0(1+n)^t$$

les prix, r_t (ou i_t) et w_t, s'ajustent instantanément de façon à vérifier l'équilibre des marchés tout en satisfaisant

$$r_t = f'(k_t) - \delta \equiv r(k_t)$$
$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \equiv w(k_t)$$

(4) Dynamique d'équilibre

(4.1) Trajectoires techniquement réalisables

Avant de définir la dynamique d'équilibre, il convient de limiter l'ensemble des possibles. Toutes les allocations ne sont pas accessible.

La consommation agrégée est la différence entre la production (le revenu) et l'épargne agrégée:

$$C_t = Y_t - S_t$$
$$\iff \quad C_t = F(K_t, L_t) - S_t$$

Comme l'économie est autarcique l'épargne agrégée doit égaliser l'investissement ; ie on doit avoir

$$\underbrace{S_t - \delta K_t}_{\text{l'épargne net de la dépréciation}} = \underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\text{la variation du stock de capital}}$$

On a donc :

$$C_t = F(K_t, L_t) - (K_{t+1} - K_t + \delta K_t)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_t = F(K_t, L_t) - (K_{t+1} - (1-\delta) K_t)$$

Notons $c_t = \frac{C_t}{L_t}$ la consommation agrégée par tête. On a :

consommation des jeunes.

consommation des vieux.

$$c_t = \frac{c_{1t} L_t + c_{2t} L_{t-1}}{L_t}$$

$$\Leftrightarrow c_t = c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n}$$

En réécrivant la contrainte de ressource sous forme intensive, on a donc :

$$\boxed{c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n} = f(k_t) + (1-\delta) k_t - (1+n) k_{t+1}} \quad (5)$$

<u>Définition 1</u> Soit $\bar{k}_0 \geq 0$ la condition initiale du ratio capital-travail. La trajectoire $\{(k_t, c_{1t}, c_{2t})\}_{t=0}^{\infty}$ est techniquement réalisable si $k_0 = \bar{k}_0$ et $\forall\, t \in \mathbb{N}$ la contrainte de ressource (5) est satisfaite avec $k_t \geq 0$, $c_{1t} \geq 0$ et $c_{2t} \geq 0$.

(4.2) Equilibre temporaire

<u>Définition 2</u> Un équilibre temporaire en période t est un état où, étant donné ~~~~ l'anticipation du taux d'intérêt r_{t+1}^e, tous les marchés sont apurés.

Nous avons déjà évoqué l'équilibre des marchés des facteurs (capital et travail), il reste le marché du bien homogène où à l'équilibre la demande $(C_t + I_t)$ doit égaliser l'offre (Y_t). A l'équilibre du marché du bien homogène nous devons donc avoir :

$$C_t + I_t = F(K_t^d, L_t^d)$$

Définition 2

À la période t, avec un stock de capital $K_t \geq 0$ et une offre de travail $L_t \geq 0$, on pose r^e_{t+1} le taux d'intérêt réel anticipé ($r^e_{t+1} - 1$). Soit $k_t = K_t / L_t$, un équilibre temporaire en période t est un état de l'économie $(k_t, c_{1t}, c_{2t}, w_t, r_t)$ tel que les marchés sont apurés pour $c_{1t} = w_t - s_t$ et $c_{2t} = (1+r_t)\, k_t (1+n)$ où $s_t = s(w_t, r^e_{t+1})$ est l'épargne optimale définie dans la proposition 1, et les prix satisfont les conditions d'optimalité de la firme $w_t = w(k_t)$ et $r_t = r(k_t)$

La conso des vieux à la période t est

$C_{2t} = c_{2t} L_{t-1} \Leftrightarrow c_{2t} = \frac{C_{2t}}{L_t} \cdot \frac{L_t}{L_{t-1}}$

$\Leftrightarrow c_{2t} = (1+r_t) \frac{S_{t-1}}{L_t} (1+n)$

$\Leftrightarrow c_{2t} = (1+r_t)\, k_t (1+n)$

$S_{t-1} = K_t$ l'épargne des jeunes en $t-1$ est le capital à la date t

Remarque 1 On exclut le cas $w = 0$, car dans ce cas il n'y a pas grand chose à dire : pas de consommation et pas d'épargne en première période.

L'objet de la proposition suivante est de discuter l'existence et l'unicité de l'équilibre temporaire.

Proposition 1

À la période t, étant donné un stock de capital par tête $k_t \geq 0$, pour tout $r^e_{t+1} > -1$

(i) Si $k_t > 0$ il existe un équilibre temporaire $(k_t, c_{1t}, c_{2t}, w_t, r_t)$ et $c_{1t} > 0$, $c_{2t} > 0$.

(ii) Si $k_t = 0$ il existe un équilibre temporaire si et seulement si le capital n'est pas essentiel. Dans ce cas $w(0) = f(0) > 0$, $c_{1t} > 0$, $s_t > 0$ et $c_{2t} = 0$

Il faudrait donc que la technologie ne soit pas néoclassique.

(iii) Si l'équilibre temporaire existe, il est unique

Preuve • Le point (iii), l'unicité, est évident. Étant donné k_t, les CPO de la firme déterminent de façon unique w_t et r_t : $w(k_t)$ et $r(k_t)$. En complétant avec r^e_{t+1}, l'épargne est déterminée de façon unique, via $s(w_t, r^e_{t+1})$, et donc c_{1t}. La consommation des vieux en t, $c_{2t} = (1+r_t)k_t(1+n)$ est aussi déterminée de façon unique ∎

• Pour le point (i). Montrons d'abord que w_t est nécessairement positif si $k_t > 0$. Nous avons déjà que $w'(k) = -kf''(k) > 0$, c'est-à-dire que w_t est une fonction monotone croissante de k_t. Montrons que $w(0) = 0$, ce qui suffit à assurer que le salaire réel est strictement positif $\forall k_t > 0$.

Nous savons que

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \geq 0$$

ou $w_t = F_L(K,L) \geq 0$

via les conditions d'optimalité de la firme. Puisque la productivité marginale du travail du travail est homogène de degré 0, on a aussi

$$w_t = F_L\left(1, \frac{L}{K}\right) = F_L(1, k^{-1}) = w(k)$$

Ainsi lorsque k tend vers zéro

$$\lim_{k \to 0} w(k) = \lim_{x \to \infty} F_L(1,x) = 0$$

via les conditions d'Inada. On a donc

$$w(0) = f(0) - f'(0).0 = 0$$

et puisque $w'(k) > 0$, $w(k) > 0 \ \forall\, k > 0$.

On sait qu'il existe un unique système de prix $w_t = w(k_t) > 0$ et $r_t = r(k_t) > 0$ le long de la frontière des prix des facteurs (ie qui vérifient les conditions d'optimalité de la firme), cohérent avec l'apurement des marchés des facteurs (le point le long de la frontière des prix des facteurs où la pente est égale à l'opposé du ratio capital-travail).

Si les marchés des facteurs sont apurés, alors par la <u>loi de Walras</u> le marché du bien homogène est lui aussi apuré en période t.

Par la proposition 1 de la section 2, on sait alors que la consommation des jeunes $c_{1t} = w_t - s(w_t, r_{t+1}^e)$ est strictement positive (puisque nous avons montré plus haut que $w_t > 0$), et que la consommation des vieux $c_{2t} = (1+n)(1+r_t)k_t$ est aussi strictement positive puisque $r_t = f'(k_t) - \delta > -1$ (car $\delta \in [0,1]$ et $f'(k_t) > 0$). ▨

- Pour le point (ii), il est évident qu'il n'est pas possible d'obtenir un niveau de conso strictement positif des jeunes si la fonct° de product° est néoclassique (pas de capital $\Rightarrow$ pas de production). Pour que c_{1t} ~~soit~~ soit strictement positif il faut que le capital ne soit pas indispensable à la production, c'est à dire que $f(0) > 0$. La proposit° de la section nous assure que $c_{1t} > 0$ et $s_t \in]0, w_t[$.

Mais les vieux meurent quand même de faim puisqu'ils ne peuvent pas se nourrir sur le capital. ∎

(4.3) Equilibre dynamique

L'équilibre temporaire décrit dans la section précédente requiert (i) les jeunes ménages et les firmes optimisent étant données leurs anticipations et les contraintes auxquelles ils sont exposés, (ii) les marchés sont apurés.

À aucun moment on ne s'interroge sur la différence éventuelle entre le taux d'intérêt anticipé et celui qui va effectivement se réaliser.

Un équilibre dynamique est une suite d'équilibres temporaires telle que les anticipations des agents sont vérifiées à chaque période.

Définition 3 Une trajectoire d'équilibre est une trajectoire réalisable $\{(k_t, c_{1t}, c_{2t})\}_{t=0}^{\infty}$ telle que $\forall t \in \mathbb{N}$ l'état $(k_t, c_{1t}, c_{2t}, w_t, r_t)$ est un équilibre temporaire avec $r^e_{t+1} = r(k_{t+1})$