15

$$-u'(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u'\big((1+r_{t+1})s_t\big)(1+r_{t+1}) = 0 \qquad (1)$$

et on vérifie facilement que la dérivée seconde est bien négative :

$$\frac{d^2\tilde{U}}{ds_t^2} = u''(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u''\big((1+r_{t+1})s_t\big)(1+r_{t+1})^2 < 0$$

car l'utilité marginale est décroissante.

<u>Proposition 1</u> Soit $w_t > 0$, le problème du jeune adulte admet une unique solution $s_t = s(w_t, r_{t+1})$. La solution est intérieure et satisfait (1)

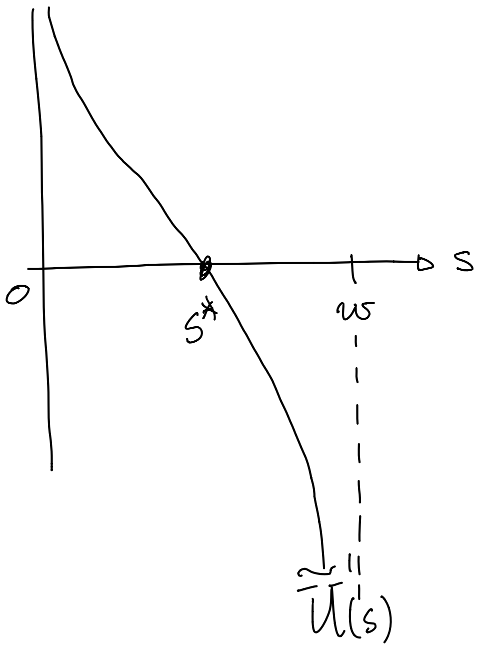
<u>Preuve de la proposition 1</u> Considérons l'utilité marginale de l'épargne sur les bords de l'intervalle $[0, w_t]$. Nous avons :

$$\lim_{s_t \to 0} \frac{d\tilde{U}}{ds_t} = -u'(w_t) + (1+\rho)^{-1}(1+r_{t+1}) \lim_{s_t \to 0} u'\big((1+r_{t+1})s_t\big) = \infty$$

car $\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$, et

$$\lim_{s_t \to w_t} \frac{d\tilde{U}}{ds_t} = -\lim_{s_t \to w_t} u'(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1}(1+r_{t+1}) u'\big((1+r_{t+1})w_t\big) = -\infty$$

pour la même raison. Par ailleurs nous savons que l'utilité marginale est une fonction continue monotone décroissante.



Il existe donc un unique s^* dans $]0, w_t[$ tel que $\frac{d\tilde{U}}{ds} = 0$. Puisque l'utilité marginale de l'épargne est une fonction bijective, on peut définir l'épargne optimale comme une fonction implicite des prix (considérés comme donnés par les jeunes adultes) :

$$S_t = S(w_t, r_{t+1})$$

On déduit directement les consommations en première et seconde période :

$$c_{1,t} = w_t - S(w_t, r_{t+1})$$

$$c_{2,t+1} = S(w_t, r_{t+1})(1 + r_{t+1})$$

(2.2) L'équation d'Euler

En substituant les définitions de c_{1t} et $c_{2,t+1}$ dans la condition du premier ordre (1), on obtient :

$$u'(c_{1t}) = (1+\rho)^{-1} u'(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})$$

Il s'agit de l'équation d'Euler, elle caractérise la dynamique du flux de consommations. La trajectoire de consommation optimale doit être telle que le coût marginal de l'épargne en terme d'utilité en première période soit égal au bénéfice marginal de l'épargne en seconde période.

On a :

$$\tilde{U}(s_t) = u(\underbrace{w_t - s_t}_{c_{1,t}}) + (1+\rho)^{-1} u(\underbrace{(1+r_{t+1})s_t}_{c_{2,t+1}})$$

$$\Longrightarrow \quad d\tilde{U} = -u'(c_{1,t})\,ds + (1+\rho)^{-1} . u'(c_{2,t+1}) . (1+r_{t+1})\,ds$$

CPO $\Rightarrow$

$$\underbrace{u'(c_{1,t})\,ds}_{\text{coût d'opportunité d'un accroissement de l'épargne en terme d'utilité.}} = \underbrace{(1+\rho)^{-1} u'(c_{2,t+1}) . \underbrace{(1+r_{t+1})\,ds}_{\text{gain de l'épargne rémunérer au taux } r_{t+1}}}_{\text{bénéfice en seconde période d'un accroissement de l'épargne.}}$$

Si le jeune adulte décide d'augmenter son

Épargne d'une unité, cela va lui coûter $u'(c_1)$ en première période car il perd de la consommation. En transférant cette unité de consommation vers le futur il bénéficie d'un intérêt et obtient donc $1+r_{t+1}$ unités en seconde période. Le gain en termes d'utilité en seconde période est donc $u'(c_2)(1+r_{t+1})$. On obtient l'équation d'Euler en escomptant cette utilité marginale, pour la rendre comparable avec l'utilité de première période.

L'équation d'Euler se retrouve aussi sur le graphique, dans le plan (c_1, c_2), donné dans la section précédente. On peut réécrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\underbrace{\frac{(1+\rho)\, u'(c_{1,t})}{u'(c_{2,t+1})}}_{\text{pente de la courbe d'indifférence}} = \underbrace{1+r_{t+1}}_{\text{pente de la contrainte budgétaire intertemporelle}} \qquad (2)$$

Taux Marginal de Substitution de la consommation de seconde période pour la consommation de première période

Taux Marginal de Transformat° ou rapport des prix.

19

Le TMS nous dit comment le jeune souhaite substituer la consommation présente et la consommation future (en maintenant son niveau d'utilité).

Le TMT nous dit comment le jeune peut substituer de la consommation présente et de la consommation future via le marché

L'équation d'Euler nous dit qu'à l'optimum le TMS doit égaliser le TMT. C'est une condition standard.

7 mars 2019

Nous pouvons réécrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{u'(c_{1,t})}{u'(c_{2,t})} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$$

Ainsi :

$$\rho > r_{t+1} \iff u'(c_{2,t+1}) > u'(c_{1,t}) \iff c_{1t} > c_{2,t+1}$$

Si le taux d'intérêt réel est faible, au sens où il est inférieur au taux de préférence pour le présent, alors le profil optimal de consommation est décroissant. L'individu est incité à consommer plus en première période car transférer de la consommation vers le futur ne rapporte pas assez.

Si le taux d'intérêt est exactement égal au taux de préférence pour le présent alors la trajectoire de consommation est parfaitement lisse.

Remarque 4 L'équation d'Euler ne détermine pas les niveaux de la consommation. Il existe une infinité de couple (c_{1t}, c_{2t+1}) vérifiant l'équation d'Euler. Pour identifier un unique couple (c_{1t}, c_{2t+1}) il faut compléter cette équat° avec la contrainte budgétaire intertemporelle.

(2.3) Propriétés de la fonction d'épargne

Nous savons qu'il existe une unique fonction d'épargne optimale :

$$s(w_t, R_{t+1})$$

obtenue à partir de la condition du premier ordre (1) du programme du jeune adulte. Nous ne possédons pas d'expression explicite pour cette fonction, mais nous pouvons quand même caractériser ses dérivées $\Rightarrow$ Comment varie l'épargne si le salaire réel augmente ?

La condition du premier ordre est :

$$-u'(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u'((1+r_{t+1})s_t)(1+r_{t+1}) = 0$$

En prenant la différentielle totale (ie par rapport à s_t, w_t et r_{t+1}), il vient :

$$-u''(c_{1t})\cdot(dw_t - ds_t) + (1+\rho)^{-1}\Big[u''(c_{2,t+1})\{(1+r_{t+1})ds_t + s_t dr_{t+1}\}(1+r_{t+1}) + u'(c_{2,t+1})dr_{t+1}\Big] = 0$$

$$\Leftrightarrow -u''(c_{1t})dw_t + \left[u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}\right]ds_t + \left[(1+\rho)^{-1}u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})s_t + u'(c_{2,t+1})\right]dr_{t+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{u''(c_{1t})}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}\cdot\frac{dw_t}{ds_t} + 1 + \frac{(1+\rho)^{-1}\left(u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})s_t + u'(c_{2,t+1})\right)}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}\frac{dr_{t+1}}{ds_t} = 0$$

On obtient la dérivée partielle par rapport à w_t en annulant les variations de r_{t+1} :

$$\frac{dw_t}{ds_t} \cdot \frac{u''(c_{1t})}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{ds_t}{dw_t} = \frac{u''(c_{1t})}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}} \qquad (3)$$

On obtient la dérivée partielle par rapport à r_{t+1} en annulant les variations de w_t :

$$-\frac{dr_{t+1}}{ds_t} \cdot \frac{(1+\rho)^{-1}\left(u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})s_t + u'(c_{2,t+1})\right)}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{ds_t}{dr_{t+1}} = -\frac{(1+\rho)^{-1}\left(u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})s_t + u'(c_{2,t+1})\right)}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}} \qquad (4)$$

Les deux dérivées partielles partagent le même dénominateur négatif

$$D = u''(c_{1t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1} < 0$$

car l'utilité marginale est décroissante.

Ainsi nous avons :

$$0 < \frac{ds_t}{dw_t} < 1$$

Une augmentation du salaire se traduit par une augmentation de l'épargne mais plus faible (le jeune souhaite consommer dès aujourd'hui une partie de l'augmentation de salaire).

Le signe de la seconde dérivée partielle est ambigüe, elle peut être négative ou positive. Cette indétermination du signe est lié à l'existence d'un effet substitution <u>et</u> d'un effet revenu sur le choix de c_{1t} suite à la variation du taux d'intérêt anticipé r_{t+1}.

<u>L'effet substitution sur c_{1t}</u> est négatif car une augmentat° de r_{t+1} renchérit la consommation en première période relativement à la consommation en

seconde période.

L'effet revenu sur c_{1t} est positif car une augmentat° de r_{t+1} car à revenu (w_t) constant on peut consommer plus sur les deux périodes.

Pour conclure sur le signe, il faut comparer ces deux effets. À cette fin on définit l'élasticité de l'utilité marginale :

$$\sigma(c) = -\frac{u''(c).c}{u'(c)}$$

et on réécrit la dérivée partielle par rapport à r_{t+1}:

$$\frac{ds}{dr_{t+1}} = -\frac{(1+\rho)^{-1}\left(u''(c_{2,t+1})c_{2,t+1} + u'(c_{2,t+1})\right)}{u''(c_{1,t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dr_{t+1}} = \frac{(1+\rho)^{-1}u'(c_{2,t+1})\left[-\frac{u''(c_{2,t+1})c_{2,t+1}}{u'(c_{2,t+1})} - 1\right]}{u''(c_{1,t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dr_{t+1}} = \frac{(1+\rho)^{-1}u'(c_{2,t+1})\left[\sigma(c_{2,t+1}) - 1\right]}{u''(c_{1,t}) + u''(c_{2,t+1})(1+r_{t+1})^2(1+\rho)^{-1}}$$

Le dénominateur est négatif et le signe du numérateur est donné par le signe de $\sigma(c_{2,t+1})-1$, puisque l'utilité marginale est positive. Ainsi le signe de la dérivée partielle est le signe de $1-\sigma(c_{2,t+1})$:

$$\sigma(c_{2,t+1}) \geq 1 \iff \frac{ds}{dr_{t+1}} \leq 0$$

Autrement dit, une augmentation du taux d'interêt anticipé se traduit par une augmentation de l'épargne si et seulement si l'utilité marginale (en seconde période) est faiblement élastique.

$\boxed{\text{Intuition}}$

$$(1+\rho)\,u'(c_{1t}) = (1+r_{t+1})^{\nearrow}\,u'(c_{2,t+1})^{\nearrow}$$

$$c_{2,t+1} = (1+r_{t+1})s_t$$

- $r_{t+1} \nearrow$
- Supposons que c_{1t}, et donc s_t, ne bouge pas.
- $c_{2,t+1}$ augmente mécaniquement car l'épargne rapporte plus.
- Cela contribue à baisser l'utilité marginale

MAIS

- Si l'élasticité de l'utilité marginale est faible, alors la hausse de $c_{2,t+1}$ ne sera pas suffisante pour compenser exactement la hausse de r_{t+1} de façon à vérifier l'équation d'Euler

→ Alors il faut augmenter le membre de gauche de l'équation d'Euler en diminuant c_{1t} c'est-à-dire en augmentant s_t :

$$\boxed{\begin{array}{c}\nearrow r_{t+1} \Rightarrow \nearrow s_t \\ \text{si } \sigma(c) \text{ faible}\end{array}}$$

- Si l'élasticité de l'utilité marginale est forte, alors la hausse de $c_{2,t+1}$ va plus que compenser la hausse de r_{t+1}

→ Il faut diminuer le membre de gauche de l'équation d'Euler en augmentant c_{1t} c'est-à-dire en diminuant s_t.

$$\boxed{\begin{array}{c}\nearrow r_{t+1} \Rightarrow \searrow s_t \\ \text{si } \sigma(c) \text{ faible}\end{array}}$$

Les effets substitution et revenu se compensent exactement si l'élasticité de l'utilité marginale est égale à 1. Dans ce cas une variation du taux d'intérêt n'affecte pas l'épargne.

En effet, si l'épargne est neutre vis-à-vis du taux d'intérêt, alors cela implique que c_{1t} sera aussi non affecté par une augmentation de r_{t+1}. On sait, via la contrainte budgétaire de seconde période, que $c_{2,t+1}$ va augmenter du même pourcentage que $1+r_{t+1}$. Pour rester sur l'équation d'Euler il faut que l'élasticité soit unitaire de sorte que l'utilité marginale de seconde période baisse du même pourcentage (en valeur absolue) que $1+r_{t+1}$.

Les estimations sur données concluent généralement que l'élasticité de l'utilité marginale, σ, est plus grande que 1.

$\Rightarrow$ L'effet revenu domine l'effet substitut°

$\Rightarrow$ Une augmentation du taux d'intérêt induit une baisse de l'épargne.

(3) Comportement des producteurs

Tout se passe comme dans le modèle de Solow, chapitre I. Les firmes utilisent toutes