Modèle à Générations Imbriquées

[L3]

Modèles OLG introduit par Maurice Allais et Paul Samuelson (version économie de dotation, c'est-à-dire sans production) puis par Peter Diamond (1965) qui introduit la production et le capital dans le modèle OLG. C'est cette version, et ses extensions, qui va attirer notre attention dans ce chapitre. Les avantages de cette modélisat° :

(i) L'importance du <u>cycle de vie</u> dans l'analyse du comportement des ménages. L'économie a une durée de vie infinie, mais pas les individus qui la peuple. Au cours de sa vie un individu doit prendre des décisions quant à son éducation, son offre de travail, sa fécondité, son épargne,... Ces décisions dépendent du moment où elles sont prises.

<u>ex:</u> On peut imaginer que l'incitation à s'éduquer d'un individu soit plus faible à la fin de sa vie, car il n'aura pas le temps d'en bénéficier (si l'éducation améliore la productivité au travail).

(ii) Une forme élémentaire d'hétérogénéité dans l'écomie : il y a des jeunes et des vieux ! Des individus qui ont eu le

temps de s'éduquer et d'autre pas...
Cette hétérogeneité, certes un peu mécanique car le vieillissement est exogène au modèle, permet de réflechir aux problèmes de répartitions des revenus ou du patrimoine entre les générations (ex: les retraites).

Pour nous le principal avantage de cette modélisation est qu'elle va nous permettre d'endogéneiser les comportements d'épargne. Quel type de comportement d'épargne? On distingue plusieurs motifs d'épargne :

(i) L'épargne permet de lisser la consommation au cours de la vie. Généralement, le flux de revenus d'un individu n'est pas constant (sauf pour un individu rentier à la naissance): il n'a pas de revenu au début de sa vie (enfance), beaucoup de revenu au milieu (s'il a un travail) et moins en fin de vie. Sous l'hypothèse de convexité des préférences, cet individu va créer de l'épargne (avec son revenu du travail) pour se donner les moyens de consommer plus en fin de vie (retraite), afin d'obtenir un profil de consommation plus uniforme.

(ii) L'épargne de précaution. Un individu peut avoir intérêt à épargner pour se protéger contre des aléas futurs (qui pourraient réduire ses revenus). C'est un mécanisme d'auto assurance.

(iii) L'épargne permet d'acquérir des biens de consommation durable ou un logement.

(iv) L'épargne permet de léguer un héritage à sa descendance (ce qui peut formellement s'expliquer si les préférences d'un individu dépendent des préférences de ses enfants).

(v) L'épargne est un signe extérieur de richesse (il y en a pour qui cela compte) ou de pouvoir.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons essentiellement au premier motif : si les individus épargnent c'est pour mieux répartir la consommat° au cours de la vie. Il ne serait pas difficile d'introduire le motif de legue, nous le verrons éventuellement comme une extension. Pour discuter le motif de précaution, il faudrait introduire une dimension aléatoire dans le modèle. Ce n'est pas simple et nous nous limiterons ici à des modèles déterministes. Nous n'aurons donc rien à dire sur le motif de précaution.

(1) Description générale du modèle OLG

Le temps est discret, divisé en périodes uniformes. On supposera que chaque individu adulte vie deux périodes, chaque période vaut donc environ trente ans.

Remarque 1 Il est important d'avoir en tête la longueur d'une période quand on calibre le modèle.

Remarque 2 On suppose ici que les individus "naissent adultes", ie on fait abstraction de l'enfance où les individus ne prennent aucune décisions.

On adopte les hypothèses suivantes.

H1 Le nombre de jeunes en période t, noté L_t, croît au cours du temps de façon exogène avec un taux de croissance constant $n > -1$.

On a donc $L_t = (1+n) L_{t-1}$, ou encore en itérant vers le passé : $L_t = L_0 (1+n)^t$. On ignore le problème de divisibilité et suppose que $L_t \in \mathbb{R}_+$.

(H2) Chaque individu jeune offre inélastiquement une unité de travail. Les vieux ne travaillent pas

(H3) Un unique bien homogène produit dans l'économie. Ce bien peut être utilisé pour la consommation ou l'investissement (Le capital, détenu par les vieux, est loué aux firmes) Le bien homogène est le numéraire

(H4) L'économie est autarcique.

(H5) Les firmes utilisent une fonction de production néoclassique.

(H6) À chaque période, trois marchés sont ouvert : le marché du bien homogène produit par les firmes, le marché du travail, le marché du capital. Ces trois marchés sont parfaitement concurrentiels.

Ces hypothèses ne sont pas nouvelles (à part la distinction entre les jeunes et les vieux) par rapport au chapitre I (modèle de Solow). La nouveauté dans ce modèle est que les anticipations comptent. Quand un jeune décide d'épargner c'est pour obtenir un revenu du capital, et donc consommer, quand il sera vieux. Quand il prend sa décision, il doit donc anticiper ce que lui rapportera une unité supplémentaire de capital demain.

H7 Il n'y a pas d'incertitude. Les agents forment des anticipations parfaites.

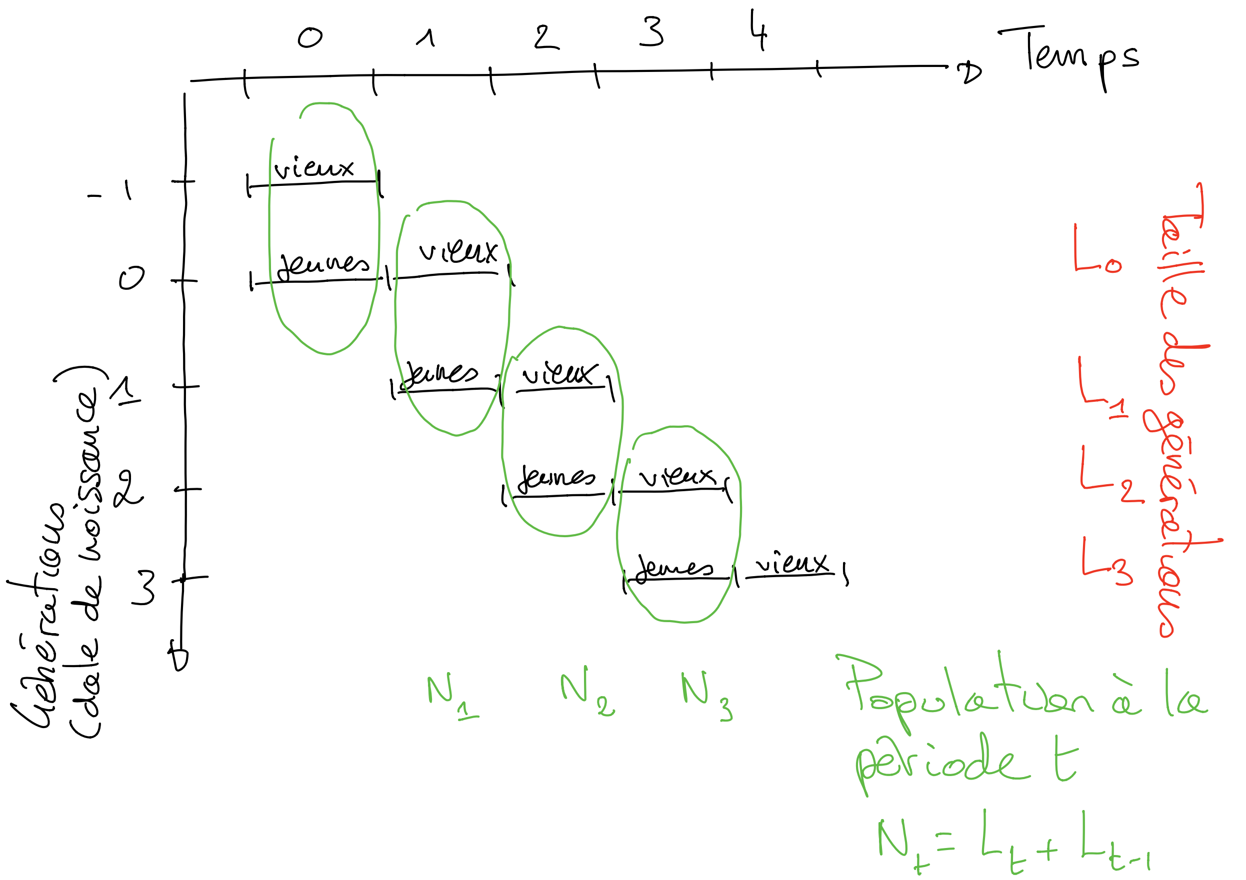
On suppose que les agents forment des anticipations cohérentes avec le modèle (en anglais on parle de "model consistent expectations") des prévisions des agents coincident avec les prévisions qui peuvent être calculées sur la base du modèle. Tout se passe comme si les agents connaissent parfaitement le modèle de l'économie et l'état courant de l'économie. Comme les agents utilisent tous la même information (ie le modèle et l'état courant de l'économie) ils forment tous la même prévision qui coincide avec l'évolution effective de l'économie.

Cette hypothèse est extrêmement simplificatrice. Une généralisation possible, est de considérer un modèle stochastique et des anticipations rationnelles. Dans ce cas les prévisions des agents ne sont plus ponctuelle (un point par variable prédite) mais des distribution de probabilité. C'est l'approche dominante en macroéconomie, mais elle n'est pas tellement moins réductrice : tous les agents font les mêmes prédictions, utilisent les mêmes distribution de probabilité, qui coïncident avec l'évolution effective de l'économie.

D'autres hypothèses, moins fortes, sont envisageables. Avec les anticipations parfaites (ou rationnelles) nous supposons que les agents ont une connaissance parfaite du modèle et de l'état de l'économie. Nous pourrions abandonner cette hypothèse en supposant que les agents doivent apprendre le modèle ou l'état de l'économie (à partir du passé des variables). Il faut alors préciser comment les agents apprennent, s'ils apprennent tous de la même façon (on aurait donc éventuellement une hétérogénéité des prévisions)... Ce n'est pas simple !

En première approximation nous supposons donc que les agents connaissent parfaitement le monde dans lequel ils évoluent et qu'ils ont la capacité de "résoudre" le modèle pour former les anticipations.

La figure suivante illustre la dynamique démographique dans le modèle OLG



Dynamique de la population. Sous H1, on a

$$N_t = (1+n)L_{t-1} + L_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N_t = (2+n)L_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{N_t = (2+n)(1+n)^{t-1} L_0}$$

Dans cette économie la population croît de façon exponentielle.

- les jeunes travaillent consomment et épargnent.
- les vieux consomment
- A la fin de chaque période, l'épargne des jeunes devient le capital des vieux qui est loué aux firmes puis consommé par les vieux.

(2) Comportement des ménages

Dans cette section nous dérivons le comportement des ménages. Étant donné les hypothèses simplificatrices (fécondité exogène, offre de travail inélastique) le seul choix des ménages concerne la décision d'épargne des jeunes adultes.

(2.1) Choix d'épargne des jeunes

On adopte les notations suivantes:

$c_{1,t}$ est la consommation des jeunes en période t

$c_{2,t+1}$ est la consommation des vieux en période $t+1$. Ces vieux étaient jeunes à la période t

$\{c_{1,t}, c_{2,t+1}\}$ est le flux de consommation d'un individu néé en t.

Etant donné les prix w_t et r_{t+1} (le salaire réel en période t perçu contre une unité de travail, et le taux d'intérêt réel entre la fin de la période t et la fin de la période $t+1$) le problème d'un jeune à la période t est :

$$\max_{c_{1t},\, c_{2,t+1}} \quad U(c_{1t}, c_{2,t+1}) = u(c_{1,t}) + (1+\rho)^{-1} u(c_{2,t+1})$$

$$\underline{sc} \qquad c_{1t} + s_t = w_t \qquad [CB1]$$

$$c_{2,t+1} = (1+r_{t+1})\, s_t \qquad [CB2]$$

$$c_{1t} \geq 0 \,, \quad c_{2,t+1} \geq 0$$

La fonction $U(.)$ représente l'utilité obtenue tout au long de la vie, que le jeune cherchera à maximiser, la fonction $u()$ représente le flux d'utilité obtenu sur une période. Il y a ici deux hypothèses implicites : (i) l'utilité tout au long de la vie est une fonction séparable (les dérivées croisées sont nulles), et (ii) l'utilité sur une période est la même pour les jeunes et pour les vieux.

H8 L'utilité sur une période, $u()$, est une fonction continue, deux fois continûment dérivable, croissante (ie $u'(c) > 0$) et l'utilité marginale est décroissante (ie $u''(c) < 0$, concavité). On suppose aussi que l'utilité marginale tend vers l'infini quand la consommation tend vers 0.

Le paramètre ρ est le taux de préférence pour le présent. On suppose généralement qu'il est positif. Le terme $(1+\rho)^{-1}$ s'interprète comme un facteur d'escompte de l'utilité. Si ρ est proche de 0, le jeune n'a pas de préférence pour le présent dans le sens où il ne fait pas la différence entre de l'utilité aujourd'hui ou demain (quand il sera vieux).

s_t est le flux d'épargne du jeune. En période t la somme de la consommation, c_{1t}, et de l'épargne, s_t, doit être égale au revenu (w_t puisque pour un jeune la seule source de revenu est le travail).

⚠ À la fin de la période t, le flux d'épargne s_t devient un stock : la richesse financière dans laquelle le vieux pourra puiser pour consommer.

<u>Remarque 1</u> Dans la contrainte budgétaire de seconde période, CB2, le taux d'intérêt réel en période $t+1$, est en fait l'anticipation du taux d'intérêt réel. Puisque les anticipations sont supposées parfaites, on ne distingue pas le taux d'intérêt réel anticipé du taux d'intérêt réel effectif. Notons

aussi qu'il s'agit de la seule variable anticipée.

Remarque 2 En substituant [CB2] dans [CB1], on peut construire une contrainte budgétaire intertemporelle :

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = w_t \qquad [CBI]$$

$(1+r_{t+1})^{-1}$ s'interprète comme le facteur d'escompte de la consommation en seconde période (qui permet de « traduire » de la consommation en seconde période en termes de conso de première période). C'est aussi le prix relatif du bien en seconde période. Quand le taux d'intérêt réel anticipé augmente la consommation en première période renchérit par rapport à la consommation en seconde période

Remarque 3 On peut représenter graphiquement le choix de l'adulte jeune dans le plan (c_1, c_2). La contrainte budgétaire s'écrit :

$$[CBI] \Leftrightarrow \quad c_2 = (1+r)w - (1+r)c_1$$

les courbes d'indifférence sont décroissantes et convexes. En effet la courbe d'indifférence de niveau α est définie par :

$$U(c_1, c_2) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad u(c_1) + (1+\rho)^{-1} u(c_2) = \alpha$$

En prenant la différentielle totale, il vient :

$$u'(c_1)\, dc_1 + (1+\rho)^{-1} u'(c_2)\, dc_2 = 0$$

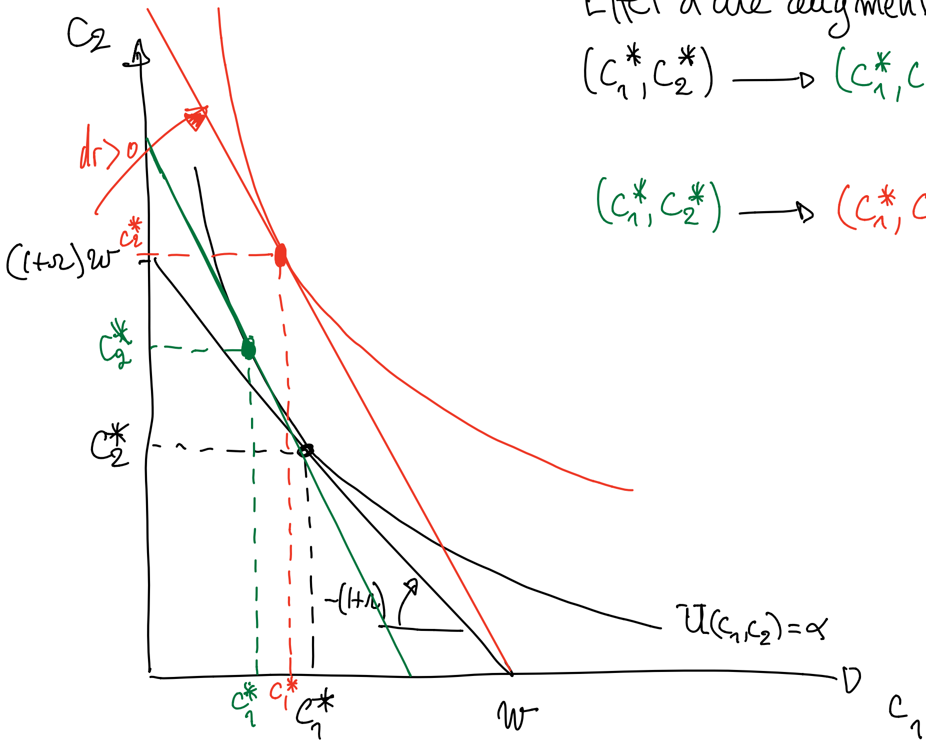
$$\Leftrightarrow \quad \frac{dc_2}{dc_1} = -(1+\rho) \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} < 0$$

le long de la courbe d'indifférence, la pente de la tangente est négative en tout point. La courbe d'indifférence est donc monotone décroissante. Le long de la courbe d'indifférence quand c_1 augmente, et donc c_2 diminue, l'utilité marginale en première période décroît alors que l'utilité marginale en seconde période croît. Ainsi quand c_1 augmente la pente de la tangente décroît (en valeur absolue). La courbe d'indifférence est donc convexe.

Effet d'une augmentation de r

$(c_1^*, c_2^*) \longrightarrow (c_1^*, c_2^*)$ effet de substitution

$(c_1^*, c_2^*) \longrightarrow (c_1^*, c_2^*)$ effet revenu



En regardant de plus près le problème du jeune adulte, il apparaît que le seul instrument (la seule variable de choix) est l'épargne. Pour le voir il suffit de substituer les deux contraintes budgétaires dans l'objectif.

$$\bar{U}(c_{1,t}, c_{2,t+1}) = u(c_{1,t}) + (1+\rho)^{-1} u(c_{2,t+1})$$

$$\underset{\text{CB2}}{\underset{\text{CB1}}{\longrightarrow}} \quad \tilde{U}(s_t) = u(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u((1+r_{t+1})s_t)$$

où s_t doit appartenir à l'intervalle $[0, w_t]$. Le programme du jeune adulte devient :

$$\max_{s_t} \; u(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u((1+r_{t+1})s_t)$$

$$\underline{sc} \quad 0 \leq s_t \leq w_t$$

La condition du premier ordre est $\dfrac{d\tilde{U}}{ds_t} = 0$, soit

$$-u'(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u'\big((1+r_{t+1})s_t\big)(1+r_{t+1}) = 0 \qquad (1)$$

et on vérifie facilement que la dérivée seconde est bien négative :

$$\frac{d^2\tilde{U}}{ds_t^2} = u''(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1} u''\big((1+r_{t+1})s_t\big)(1+r_{t+1})^2 < 0$$

car l'utilité marginale est décroissante.

<u>Proposition 1</u> Soit $w_t > 0$, le problème du jeune adulte admet une unique solution $s_t = s(w_t, r_{t+1})$. La solution est intérieure et satisfait (1)

<u>Preuve de la proposition 1</u> Considérons l'utilité marginale de l'épargne sur les bords de l'intervalle $[0, w_t]$. Nous avons :

$$\lim_{s_t \to 0} \frac{d\tilde{U}}{ds_t} = -u'(w_t) + (1+\rho)^{-1}(1+r_{t+1}) \lim_{s_t \to 0} u'\big((1+r_{t+1})s_t\big) = \infty$$

car $\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$, et

$$\lim_{s_t \to w_t} \frac{d\tilde{U}}{ds_t} = -\lim_{s_t \to w_t} u'(w_t - s_t) + (1+\rho)^{-1}(1+r_{t+1}) u'\big((1+r_{t+1})w_t\big) = -\infty$$

pour la même raison. Par ailleurs nous savons que l'utilité marginale est une fonction continue monotone décroissante.