$$\iff (1+n)\underbrace{\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}}_{\text{taux de croissance de } k} = s\underbrace{\frac{f(k_t)}{k_t}}_{\text{productivité moyenne de } k} - (n+\delta)$$

$$\Rightarrow (1+n)\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} > s\frac{f(k^*)}{k^*} - (n+\delta)$$

car la productivité moyenne est une fonction décroissante de k. Finalement par définition de l'état stationnaire nous avons

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} > 0$$

Ainsi, lorsque $k_t \in \,]0, k^*[$ on a nécessairement $k_{t+1} \in \,]k_t, k^*[$. En itérant k_t convergera donc vers k^* de façon monotone ∎

(2) L'équilibre décentralisé

(2.1) Les ménages

- Un ménage est une dynastie dont la durée de vie est infinie. L'économie est peuplée d'un continuum de ménages indicés par $j \in [0,1]$. Le nombre de tête dans chaque ménage croît au taux constant $n > 0$. La population totale de l'économie à la date t est $L_t = (1+n)^t$ (nous normalisons le nombre de tête à la date 0 $L_0 = 1$).

- $c_t(j)$ est la consommation par tête du ménage j
- Chaque tête dans un ménage est dotée d'une unité de travail à chaque période. Ce travail est offert inélastiquement sur un marché concurrentiel en contrepartie d'un salaire w_t.
- Chaque ménage est initialement doté de capital $K_0(j)$ (ou $k_0(j)$ en termes intensif). Le ménage j accumule le capital de la façon suivante :

$$K_{t+1}(j) = (1-\delta)K_t(j) + I_t(j)$$

soit en termes intensifs (par tête) :

$$(1+n)k_{t+1}(j) = (1-\delta)k_t(j) + i_t(j)$$

- Chaque ménage loue le capital qu'il détient aux firmes sur un marché parfaitement concurrentiel. Une unité de capital louée à la période t rapporte r_t au ménage.
- Les ménages sont les propriétaires des firmes. On notera $\Pi_t(j)$ les dividentes perçus par le ménage $j \in [0,1]$ à la période t. Sans perte de généralité, dans ce modèle, on supposera qu'il n'existe pas de marché où les droits de propriété sur les firmes (les actions) sont échangés entre les ménages (car dans ce modèle où les marchés sont parfaitement concurrentiels et où les

rendements d'échelle sont constants, il n'y a pas de profit à l'équilibre, les dividendes sont donc nuls et la répartition des actions importe peu). On supposera que le ménage $j \in [0,1]$ détient une fraction $\alpha(j)$ constante des firmes, avec $\int_0^1 \alpha(j)\,dj = 1$. Les dividendes perçus par le ménage $j \in [0,1]$ sont alors $\Pi_t(j) = \alpha(j)\,\Pi_t$ à la période t.

- Le ménage $j \in [0,1]$ utilise son revenu pour consommer ou investir. Sa contrainte budgétaire saturée s'écrit :

$$C_t(j) + I_t(j) = w_t L_t + r_t K_t(j) + \Pi_t(j)$$

ou en termes intensifs :

$$\underbrace{c_t(j)}_{\text{consommation par tête du ménage } j} + \underbrace{i_t(j)}_{\text{investissement par tête du ménage } j.} = \underbrace{w_t + r_t k_t(j) + \pi_t(j)}_{y_t(j),\ \text{le revenu par tête du ménage } j}$$

- Le partage entre consommation et investissement est déterminé par la règle linéaire suivante

$$\begin{cases} c_t(j) = (1-s)\,y_t(j) \\ i_t(j) = s\,y_t(j) \end{cases} \qquad \forall j \in [0,1].$$

(2.2) Les firmes

- À la période t, l'économie est peuplée de M_t firmes indicées par $m \in [0, M_t]$.
- Les firmes emploient du travail et louent du capital sur des marchés parfaitement concurrentiels, pour produire un même bien homogène, à l'aide d'une technologie commune, qu'elles revendront aux ménages sur un marché parfaitement concurrentiel.
- On note $K_t(m)$ et $L_t(m)$ les demandes en capital et travail de la firme $m \in [0, M_t]$ à la période t
- Le profit de la firme m est alors

$$\Pi_t(m) = F\big(K_t(m), L_t(m)\big) - r_t K_t(m) - w_t L_t(m)$$

- Chaque firme choisit ses demandes de facteurs de façon à maximiser son profit. Si la solution est intérieure, on doit donc avoir

$$F_K\big(K_t(m), L_t(m)\big) = r_t$$
$$F_L\big(K_t(m), L_t(m)\big) = w_t$$

c'est-à-dire l'égalisation des prix et des productivités marginales. Supposons, par exemple que la productivité marginale du travail soit supérieure au taux de

37

salaire w_t. Nous savons, puisque F est une fonction de production néoclassique, que $F_{LL} < 0$, c'est-à-dire que la productivité marginale du travail décroît avec la quantité de travail. Dans ce cas la firme aurait intérêt à utiliser plus de travail car marginalement cela rapporte plus ($F_L(k,l)$) que cela coûte (w_t), et donc cela conduit à une augmentation du profit. Ce faisant cela réduit la productivité marginale du travail qui se rapproche de w_t. On pourrait reprendre le même argument dans l'autre sens (avec une productivité du travail inférieure à w_t), pour une firme il ne peut être optimal d'avoir une productivité marginale différente du prix.

- Puisque la fonction de production est néoclassique nous savons que les productivités marginales sont homogènes de degré 0. Autrement dit elles ne dépendent que du ratio $X_t(m) = K_t(m)/L_t(m)$. On a

$$F_K(K_t(m), L_t(m)) = F_K(X_t(m), 1)$$

$$F_L(K_t(m), L_t(m)) = F_L(1, X_t(m)^{-1})$$

La productivité marginale du capital est décroissante par rapport au ratio $X_t(m)$, la productivité marginale du travail et croissante par rapport au même ratio. 38

Clairement, puisque les mêmes prix, r_t et w_t, s'imposent à toutes les firmes, le ratio $K_t(m)/L_t(m)$ doit être unique et indépendant de l'indice m :

$$X_t(m) = X_t \quad \forall\, m \in [0, M_t]$$

• Pour que le programme de la firme m ait une solution il faut qu'il existe un unique X_t tel que :

$$\begin{cases} r_t = f'(X_t) \\ w_t = f(X_t) - f'(X_t)\,X_t \end{cases}$$

ce qui pose implicitement une contrainte sur les prix w_t et r_t pour qu'ils soient compatibles avec un équilibre compétitif. D'après la première équation nous avons :

$$X_t = f'^{-1}(r_t)$$

soit en substituant dans la seconde équation du système :

$$w_t = \underbrace{f\left(f'^{-1}(r_t)\right) - r_t\, f'^{-1}(r_t)}_{\mathcal{F}(r_t)}$$

$$\tilde{F}'(r) = f'\left(f'^{-1}(r)\right)\left(f'^{-1}(r)\right)' - f'^{-1}(r) - r\left(f'^{-1}(r)\right)'$$

$$\Leftrightarrow \tilde{F}'(r) = r\left(f'^{-1}(r)\right)' - f'^{-1}(r) - r\left(f'^{-1}(r)\right)'$$

$$\Leftrightarrow \tilde{F}'(r) = -f'^{-1}(r)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{F}'(r) = -X} = \frac{dw}{dr}$$

Une augmentation de la rémunération du capital d'une unité doit s'accompagner d'une réduction du taux de salaire de X

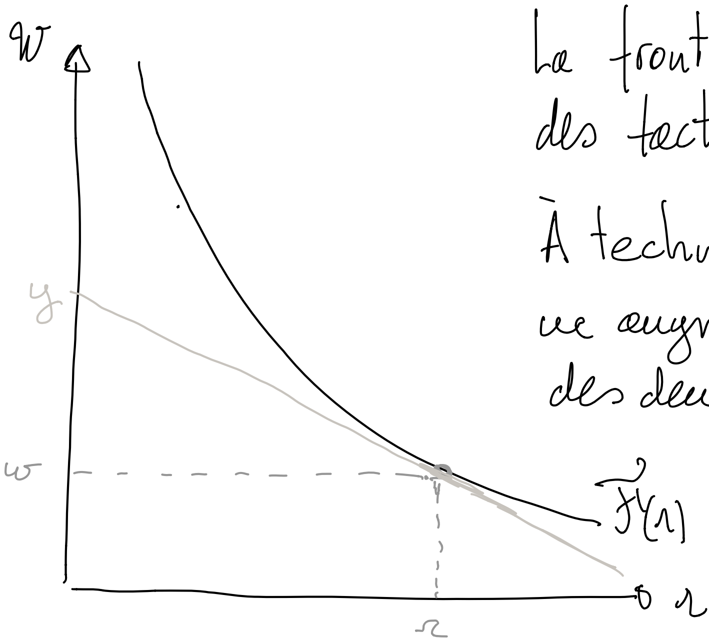
Pour qu'à la période t les prix soient compatibles avec un équilibre compétitif il faut que

$$w_t = \tilde{F}(r_t)$$

où $\tilde{F}(r) = f\left(f'^{-1}(r)\right) - r f'^{-1}(r)$ est une fonction décroissante de r

$w + Xr = y$

$\Leftrightarrow w = y - Xr$



La frontière des prix des facteurs.

À technologie inchangée une augmentation simultanée des deux prix, r et w, n'est pas possible.

<u>Exemple</u> Avec une fonction de production Cobb-Douglas $Y_t = F(K_t, L_t) = A K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$, nous aurions :

$$f(X_t) = A X_t^{\alpha}, \quad \text{et}$$
$$f'(X_t) = \alpha A X_t^{\alpha-1}$$

Ainsi le prix du capital devrait vérifier

$$r_t = \alpha A X_t^{\alpha-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad X_t^{\alpha-1} = \frac{r_t}{\alpha A}$$

$$\Leftrightarrow \quad X_t = \left(\frac{r_t}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{w_t = (1-\alpha) A \left(\frac{\alpha A}{r_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Chaque point le long de la frontière des prix des facteurs, $\mathcal{F}(r)$, correspond à un ratio capital/travail X différent et correspond à une répartition différente du revenu entre rémunération du capital et salaire. La valeur absolue de la pente de la tangente à la frontière des prix des facteurs donne le ratio optimal capital/travail. Si le taux de salaire est élevé, et donc si la rémunération du capital est faible puisqu'il y a une relation inverse entre ces deux prix le long de la frontière des prix des facteurs, le ratio X sera élevé car il est alors optimal pour la firme d'employer plus de capital que de travail.

- les conditions nécessaires d'optimalité de la firme $m \in [0, M_t]$ déterminent le ratio des facteurs de production (la combinaison optimale), $K_t(m)/L_t(m) = X_t$, mais pas la taille de la firme, $L_t(m)$.

- les conditions nécessaires d'optimalité de la firme $m \in [0, M_t]$ (ou le thm d'Euler) impliquent:

$$r_t X_t + w_t = f(X_t)$$

il s'ensuit que le profit de la firme m est forcément nul:

$$\Pi_t(m) = L_t(m)\left(f(X_t) - w_t - r_t X_t\right) = 0$$

(2.3) Apurement des marchés

- Le marché du capital est équilibré ssi :

$$\underbrace{\int_0^{M_t} K_t(m)\,dm}_{\text{demande de capital}} = \underbrace{(1+n)^t \int_0^1 k_t(j)\,dj}_{\text{offre de capital}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{M_t} K_t(m)\,dm = \underbrace{K_t}_{\text{le stock de capital agrégé dans l'économie.}}$$

- Le marché du travail est équilibré ssi :

$$\underbrace{\int_0^{M_t} L_t(m)\,dm}_{\text{demande de travail}} = \underbrace{(1+n)^t \int_0^1 dj}_{\text{Offre de travail}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{M_t} L_t(m)\,dm = L_t$$

(2.4) Equilibre général

Définition 1 L'équilibre de l'économie décentralisée est une allocation $\left\{ \left(k_t(j), c_t(j), i_t(j)\right)_{j\in[0,1]}, \left(K_t(m), L_t(m)\right)_{m\in[0,M_t]} \right\}_{t=0}^{\infty}$, une distribution des profits $\left\{ (\pi_t(j))_{j\in[0,1]} \right\}_{t=0}^{\infty}$ et des trajectoires de prix $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ telles que

(i) Etant donnés $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ et $\{\pi_t(j)_{j\in[0,1]}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{k_t(j), c_t(j), i_t(j)\}$ est cohérent avec le comportement du ménage j, pour tout $j\in[0,1]$

(ii) $(K_t(m), L_t(m))$ maximise les profits de la firme, $\forall m\in[0,M_t]$, $\forall t\in\mathbb{N}$

(iii) Les marchés des facteurs sont apurés à chaque période

Proposition 4 Pour toute distribution initiale $(k_0(j))_{j\in[0,1]}$ un équilibre existe. L'allocation de la production entre les firmes n'est pas déterminé, mais l'équilibre est unique au regard des agrégats et des allocations des ménages. Le ratio capital travail est une suite $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ telle que

$$k_{t+1} = G(k_t)$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $k_0 = \int_0^1 k_0(j)dj$ donné, avec

$$G(k) = \left[s f(k) + (1-\delta) k\right](1+n)^{-1}$$

Les prix d'équilibre sont donnés par

$$r_t = f'(k_t)$$
$$w_t = f(k_t) - f'(k_t) k_t$$

Preuve : On commence par caractériser l'équilibre, puis on établira son existence et unicité dans un second temps.

- Nous savons, via les conditions nécessaires d'optimalité de la firme $m \in [0, M_t]$, que nous devons avoir

$$K_t(m) = X_t L_t(m) \qquad \forall m \in [0, M_t]$$

En sommant sur m, il vient :

$$\underbrace{\int_0^{M_t} K_t(m)\,dm}_{\text{demande agrégée de capital}} = X_t \underbrace{\int_0^{M_t} L_t(m)\,dm}_{\text{demande agrégée de travail}}$$

L'apurement du marché du travail nous dit que :

$$\underbrace{\int_0^1 L_t(m)\,dm}_{\text{demande agrégée}} = \underbrace{L_t}_{\text{offre agrégée}}$$

L'apurement du marché du capital exige que

$$\underbrace{\int_0^1 K_t(m)\,dm}_{\text{demande agrégée}} = \underbrace{K_t}_{\text{offre agrégée}}$$

Ainsi nous devons avoir :

$$K_t = X_t L_t$$

c'est-à-dire

$$X_t = k_t$$

Le ratio capital/travail des firmes doit être égal au stock de capital par tête dans l'économie. En substituant dans les conditions nécessaires d'optimalité des firmes, on obtient les prix r_t et w_t en fonction du stock de capital par tête :

$$\begin{cases} r_t = r(k_t) \equiv f'(k_t) \\ w_t = w(k_t) \equiv f(k_t) - f'(k_t)k_t \end{cases}$$

On remarque que $r'(k) = f''(k) < 0$ et $w'(k) = -f''(k)k > 0$. Le taux d'intérêt est une fonction décroissante de k, cela reflète l'hypothèse de rendements décroissants. Le salaire est une fonction croissante de k, en notant que $w'(k)$ est aussi égal à la dérivée seconde croisée $F_{LK}(K,L)$, on comprend que la croissance du salaire par rapport à k traduit la complémentarité des facteurs (quand la quantité de capital augmente la productivité marginale du travail augmente).

- En sommant sur $j \in [0,1]$ les contraintes budgétaires des ménages, il vient :

$$\int_0^1 C_t(j)dj + \int_0^1 I_t(j)dj = r_t \int_0^1 K_t(j)dj + w_t L_t + \int_0^1 \Pi_t(j)dj$$

$$\iff \quad C_t + I_t = r_t K_t + w_t L_t + \int_0^1 \Pi_t(j)dj$$

Comme les profits des firmes sont nuls, elles ne reversent pas de dividendes, et on a :

$$C_t + I_t = r_t K_t + w_t L_t$$

ou en termes intensifs :

$$c_t + i_t = r_t k_t + w_t$$

Comme $f(k_t) = r_t k_t + w_t$, nous obtenons :

$$c_t + i_t = f(k_t)$$

la contrainte de ressource de l'économie.

- En sommant sur $j \in [0,1]$ la règle d'accumulation du stock de capital par tête :

$$(1+n)\int_0^1 k_{t+1}(j)\,dj = (1-\delta)\int_0^1 k_t(j)\,dj + \int_0^1 i_t(j)\,dj$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+n)\,k_{t+1} = (1-\delta)\,k_t + i_t$$

- En agrégeant les décisions des ménages :

$$\int_0^1 i_t(j)\,dj = s\int_0^1 y_t(j)\,dj$$

$$\Leftrightarrow \quad i_t = s.y_t$$

On obtient finalement :

$$(1+n)\,k_{t+1} = s f(k_t) + (1-\delta)\,k_t$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{k_{t+1} = G(k_t)}$$

Nous avons caractérisé l'équilibre général de cette économie. On établit facilement son existence et son unicité. La fonction $G()$ associe à tout

$k_t \in \mathbb{R}_+^*$ un unique $k_{t+1} \in \mathbb{R}_+^*$. De la même façon les fonctions $w(k)$ et $r(k)$ associent à tout $k_t \in \mathbb{R}_+^*$ les prix w_t et r_t dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, étant donné $k_0 = \int_0^1 k_0(j)dj$ il existe un unique chemin $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ et une unique trajectoire de prix $\{(r_t, w_t)\}_{t=0}^{\infty}$. Étant donnée la trajectoire de prix $\{(r_t, w_t)\}_{t=0}^{\infty}$, les allocations $\{k_t(j), c_t(j), i_t(j)\}_{t=0}^{\infty}$ sont définies de façon unique (voir le comportement des ménages). Les allocations $\{K_t(m), L_t(m)\}$ sont cohérentes avec l'équilibre tant que $K_t(m) = k_t L_t(m)$. ∎

<u>Corollaire 2</u>

$\boxed{\text{L'équilibre décentralisé décrit dans la proposition 4 est identique à l'équilibre de l'économie dictatoriale décrit dans la proposition 1}}$