ainsi que la fonction de production $Y=F(K,L)$, on obtient :

$$K_{t+1}-K_t \leq F(K_t,L_t)-\delta K_t - C_t$$

La variation du stock de capital agrégé ne peut être supérieur à la production agrégée nette de la dépréciation du capital moins la consommat° agrégée. Cette contrainte peut s'exprimer en terme intensif sous la forme :

$$(1+n)k_{t+1}-k_t \leq f(k_t)-\delta k_t - c_t$$

Remarque 1 En utilisant les mêmes approximations que dans la section précédente, on obtient :

$$\underbrace{k_{t+1}-k_t}_{\text{variation du stock de capital par tête}} \underset{\sim}{<} \underbrace{f(k_t)}_{\text{product° nette de}}-\underbrace{(n+\delta)k_t}_{\text{par tête la dépréciat°}}-\underbrace{c_t}_{\text{consommat° par tête.}}$$

Remarque 2 On présente souvent le modèle en remplaçant l'inégalité par une égalité. Tant que le dictateur cherche à ne pas gâcher des ressources, il a intérêt à saturer la contrainte.

(1.5) Allocation réalisable et allocation « optimale »

Définition 1 Une allocation réalisable est une suite $\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ qui satisfait la contrainte de ressource :

$$(1+n)k_{t+1} \leq f(k_t)+(1-\delta)k_t - c_t$$

avec la condition initiale k_0 donnée.

L'ensemble des allocations réalisables est l'ensemble des choix possibles pour le dictateur (ou planificateur central) relatifs aux trajectoires de consommation par tête et de capital physique par tête.

Notons qu'ici l'allocation est <u>intertemporelle</u>, à la date 0 le dictateur doit choisir le niveau de consommat° par tête à la date 0, mais aussi à la date 1, puis 2, etc.

Dans les chapitres suivants le dictateur maximisera un critère (le bien être des ménages par exemple) pour choisir une allocation optimale parmi les allocations réalisables.

Dans le cadre du modèle de Solow le dictateur suit plutôt une règle arbitraire pour sélectionner une allocation (d'où les guillemets sur optimal dans le titre de la section). On suppose que le dictateur obéit à la règle suivante :

$$C_t = (1-s)\,Y_t$$

où $s \in [0,1]$ est le taux d'épargne. Cette règle peut s'exprimer sous forme intensive :

$$c_t = (1-s)\,f(k_t)$$

Dans la suite on ne cherchera qu'à caractériser la dynamique des variables par tête, pour lesquelles on pourra définir un état stationnaire. On peut alors facilement déduire la dynamique des variables agrégées.

Définition 2 Une allocation centralisée « optimale » est une allocation réalisable qui satisfait la contrainte de ressource saturée et

$$c_t = (1-s)f(k_t)$$

Remarque 1 Dans le cadre du modèle de Solow c'est un peu bizarre de parler d'une allocation optimale, car le planificateur central ne fait que suivre une règle pour déterminer le niveau de la consommation. Notons toutefois qu'il décide de saturer la contrainte de ressource. Ne pas saturer cette ressource à une date t reviendrait à réduire les niveaux de consommation accessibles demain.

(1.6) Caractérisation de la dynamique de k

Proposition 1 Étant donné $k_0 > 0$, la dynamique de l'économie centralisée est un chemin $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ tel que

$$k_{t+1} = G(k_t) \quad \forall\ t \in \mathbb{N}$$

avec $G(k) = (1+n)^{-1}[s f(k) + (1-\delta)k]$

Preuve Direct en substituant la règle déterminant la consommation comme une fraction constante de la production dans la contrainte de ressource saturée ∎

La dynamique est caractérisée de façon récursive. La fonction $G()$ donne le stock de capital par tête demain comme une fonction du stock de capital par tête aujourd'hui. Étant donnée une condition initiale quelconque $k_0 > 0$, on simule aisément les chroniques du stock de capital par tête et de la consommation.

Code pour simuler le modèle (octave) avec une fonction de production Cobb-Douglas

```
periods = 100;
k = zeros(periods,1); k(1) = .7;
c = zeros(periods,1);
for t=1:periods-1
    c(t) = k(t)^alpha;
    k(t+1) = (1+n)^-1 x (s x k(t)^alpha + (1-delta) x k(t));
end
```

Remarque 1 Avec les approximations discutées plus haut la récurrence s'écrirait :

$$k_{t+1} \simeq s f(k_t) + (1-n-\delta) k_t$$

Remarque 2 On peut alternativement caractériser la dynamique en donnant le taux de croissance du stock de capital par tête. Le taux de croissance de la période t est :

$$g_{k,t} = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t}$$

En substituant la fonction G, il vient :

$$g_{k,t} = \frac{(1+n)^{-1}\left[s f(k_t) + (1-\delta)k_t\right] - k_t}{k_t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad g_{k,t} = (1+n)^{-1}\left(s\frac{f(k_t)}{k_t} + 1 - \delta\right) - 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{g_{k,t} = (1+n)^{-1}\left(s\,\varphi(k_t) + 1 - \delta\right) - 1}$$

où $\varphi(k) = \frac{f(k)}{k}$ est la productivité moyenne du capital.

Représentation graphique

Clairement $G(k)$ est une fonction monotone croissante

$$G'(k) = (1+n)^{-1}\left[s f'(k) + 1 - \delta\right] > 0 \quad \forall k$$

Il s'agit aussi d'une fonction concave puisque sa dérivée seconde est négative :

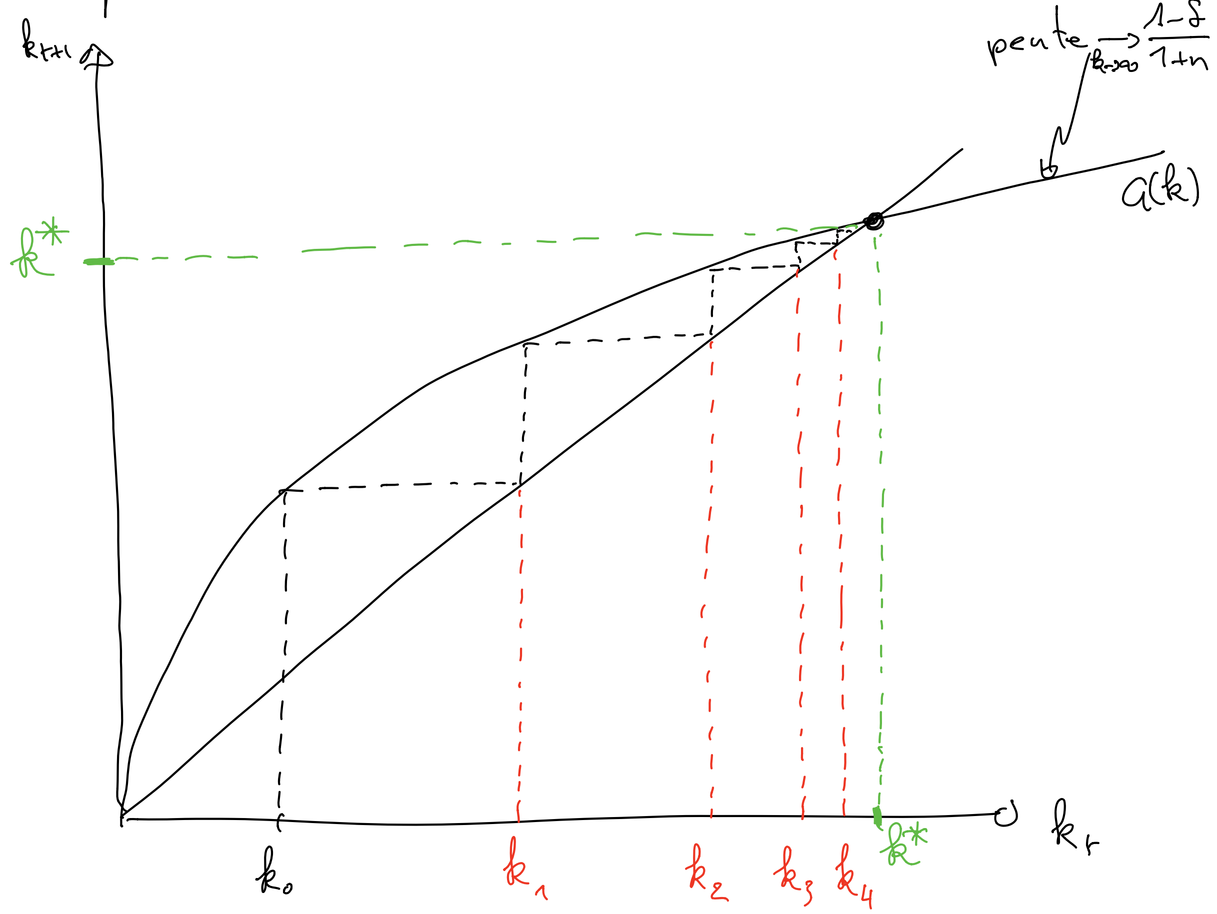
$$G''(k) = (1+n)^{-1} s f''(k) < 0 \quad \forall k$$

Par les conditions d'Inada on sait aussi que la tangente de G est zéro et de pente infinie

$$\lim_{k\to 0} G'(k) = (1+n)^{-1}s \cdot \lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty$$

et que $\displaystyle \lim_{k\to\infty} G'(k) = (1+n)^{-1}s \cdot \lim_{k\to\infty} f'(k) + \frac{1-\delta}{1+n} = \frac{1-\delta}{1+n}$

Asymptotiquement, la pente de la fonction G est strictement positive et inférieure à 1. On sait donc que la courbe représentative croisera une unique fois la première bissectrice.



(1.7) Etat stationnaire

- Un état stationnaire de ce modèle est un niveau k^* tel que si $k(0) = k^*$ alors $k(t) = k^*$ $\forall t \in \mathbb{N}$.
- L'état stationnaire k^* est un point fixe de la récurrence définie dans la proposition 1, et doit satisfaire

$$k^* = G(k^*)$$

- On ne considère pas l'état stationnaire trivial $k=0$ car (i) dans ce cas l'économie n'existe pas (toutes les variables sont nulles), (ii) on verra plus loin que cet état stationnaire est instable (si le stock de capital est arbitrairement petit, mais strictement positif, l'économie ne se dirige jamais vers $k=0$, et (iii) l'existence de cet état stationnaire n'est pas robuste (il suffit d'une perturbation arbitrairement petite sur le modèle pour le voir disparaître, en posant $f(0)=\varepsilon>0$ au lieu de $f(0)=0$).

Proposition 2

> Il existe un unique état stationnaire $k^*>0$. Cet état stationnaire dépend positivement du taux d'épargne s et négativement du taux de croissance de la population ou du taux de dépréciation du capital

Preuve : L'état stationnaire doit satisfaire :

$$(1+n)k^* = s\,f(k^*) + (1-\delta)k^*$$

Puisque nous ne nous intéressons qu'aux solutions strictement positive, nous pouvons diviser les deux membres par k^* :

$$(1+n) = s\,\frac{f(k^*)}{k^*} + 1-\delta$$

$$\iff \frac{n+\delta}{s} = \frac{f(k^*)}{k^*}$$

À l'état stationnaire la productivité moyenne du capital doit être égale à $\frac{n+\delta}{s}$, ou l'investissement par unité de capital $\frac{sf(k^*)}{k^*}$ doit être égal à $n+\delta$, qui est approximativement le taux de dépréciation du stock de capital par tête.

Le membre de gauche est strictement positif. Nous allons montrer l'existence et l'unicité de $k^*>0$ en montrant que la productivité moyenne du capital est une fonction continue monotone décroissante de $+\infty$ à 0. Nous avons:

$$\left(\frac{f(k)}{k}\right)' = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2}$$

$$\iff \left(\frac{f(k)}{k}\right)' = -\frac{F_L(K,L)}{k^2} < 0$$

puisque la productivité marginale du travail est par hypothèse positive. La productivité moyenne du capital est donc une fonct° monotone décroissante de k.

Nous avons aussi:

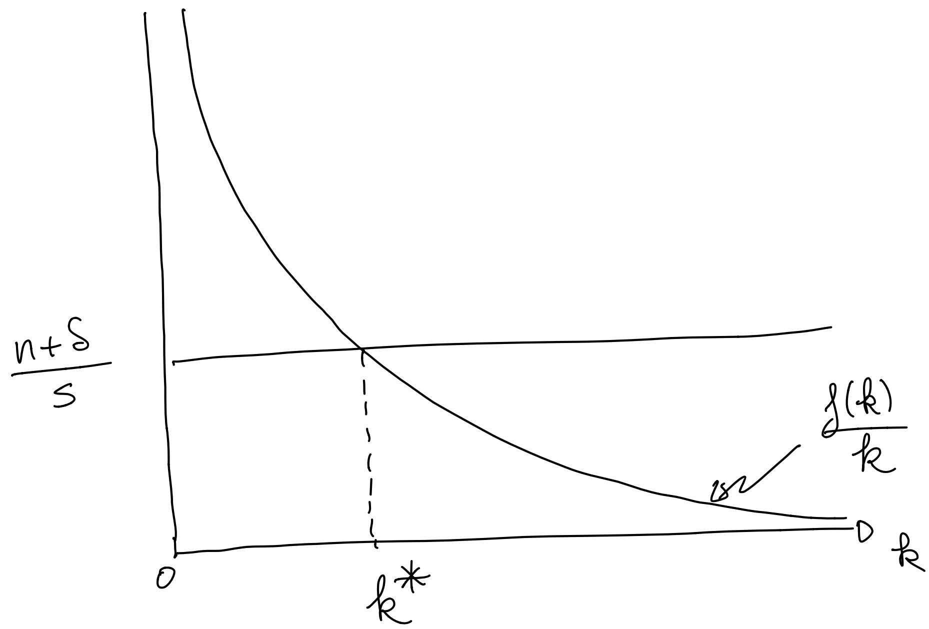
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty$$

Règle de l'Hôpital.

et

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$$

Cela implique l'existence et l'unicité de l'état stationnaire $k^* > 0$.



Notons $\phi(k) = \frac{f(k)}{k}$ la productivité moyenne du capital. Cette fonction est bijective, nous pouvons donc définir l'état stationnaire en l'inversant :

$$k^* = \phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s}\right)$$

Pour établir les conséquences d'une variation de s ou $n+\delta$ sur l'état stationnaire nous pouvons calculer des dérivées.

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\frac{dk^*}{ds} = -\left(\phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s}\right)\right)' \cdot \frac{n+\delta}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dk^*}{ds} = -\frac{1}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\frac{n+\delta}{s}\right)\right)} \cdot \frac{n+\delta}{s^2}$$

Or nous venons de montrer que $\phi' < 0$, la dérivée de k^* par rapport à s est donc bien positive : une augmentation permanente de s induit une augmentation de k^*. De la même façon on montre que les dérivées par rapport à n ou δ sont négatives ■

<u>Remarque 1</u> On déduit facilement les niveaux d'état stationnaire des autres variables du modèle :

$$y^* = f(k^*) \quad \text{et} \quad c^* = (1-s) f(k^*)$$

On retrouve les résultats habituels, une augmentation permanente du taux d'épargne induit une augmentation de la production par tête à l'état stationnaire, mais l'effet sur la consommation par tête est moins évident.

<u>Remarque 2</u> Nous aurions obtenu exactement le même état stationnaire si nous avions utilisé la version approximée de la loi d'évolution du stock de capital par tête.

(1.8) Stabilité des systèmes récurrents

Soit le système d'équations récurrentes

$$x_{t+1} = G(x_t) \qquad (*)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de variables dont les dynamiques jointes sont définies par (*), G est une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (les n équations de n variables). S'il existe, un état stationnaire x^* doit vérifier :

$$x^* = G(x^*)$$

Dans cette section on donne des résultats sur la stabilité locale ou globale de l'état stationnaire. Nous disposons d'un résultat simple et puissant si G est une fonction linéaire, les choses sont bien moins simples si le problème est non linéaire.

<u>Théorème 1</u>

Soit le système dynamique

$$x_{t+1} = A x_t + b$$

avec une condition initiale x_0 donnée, A une matrice $n \times n$ réelle, b un vecteur $n \times 1$ réel. Notons x^* l'état stationnaire, la solution de $x^* = A x^* + b$. Si toutes les valeurs propre de A sont à l'intérieur du cercle unité, alors x^* est globalement stable dans le sens où $x_t \to x_t^*$ pour toute condition initiale x_0

Théorème 2

Soit le système dynamique :

$$x_{t+1} = G(x_t)$$

avec une condition initiale x_0 donnée, G une fonction continue de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $x_t \in \mathbb{R}^n$. Notons x^* un état stationnaire de cette récurrence, vérifiant donc $x^* = G(x^*)$. Supposons que G soit différentiable en x^* et notons $J_G(x^*)$ la matrice $n \times n$ Jacobienne des dérivés partielles évaluée en x^*. Si toutes les valeurs propres de $J_G(x^*)$ sont à l'intérieur du cercle unité alors l'état stationnaire x^* est localement stable dans le sens où il existe un voisinage $B(x^*) \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x_0 \in B(x^*)$ $x_t \xrightarrow[t \to \infty]{} x^*$

On voit que dans le cas non linéaire le résultat est bien moins général, il n'établit que les conditions d'une stabilité locale. Cela n'est pas surprenant puisqu'il est basé sur une approximation linéaire (locale) de la dynamique.

Corollaire 1

① Soit $x_t, a, b \in \mathbb{R}$. Si $|a| < 1$ alors l'état stationnaire de l'équation récurrente $x_{t+1} = a x_t + b$ est globalement stable dans le sens où $x_t \xrightarrow[t \to \infty]{} x^* = b/(1-a)$ pour tout x_0

② Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue différentiable dans un voisinage de x^* tel que $x^* = g(x^*)$. Si $|g'(x^*)| < 1$, alors l'état stationnaire est localement stable...

Théorème 3 Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}$. On définit x^* l'état stationnaire qui satisfait $x^* = g(x^*)$. Si g est telle que $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ alors x^* est globalement stable

Notons que ce théorème ne donne qu'une condition suffisante. L'état stationnaire peut être stable même si pour certaines valeurs de x on ne vérifie pas l'inégalité $|g'(x)| < 1$.

Preuve : On montre la stabilité globale en montrant que la distance entre x_t et x^*, mesurée par $|x_t - x^*|$, décroît nécessairement quand t augmente.

Par définition de g et de x^*, on a :

$$x_{t+1} - x^* = g(x_t) - g(x^*)$$

Par le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe c entre x_t et x^* tel que

$$g(x_t) - g(x^*) = g'(c) \cdot (x_t - x^*)$$

Soit en prenant la valeur absolue

$$|g(x_t) - g(x^*)| = |g'(x)| \cdot |x_t - x^*|$$

Comme $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ on a nécessairement :

$$|g(x_t) - g(x^*)| < |x_t - x^*|$$

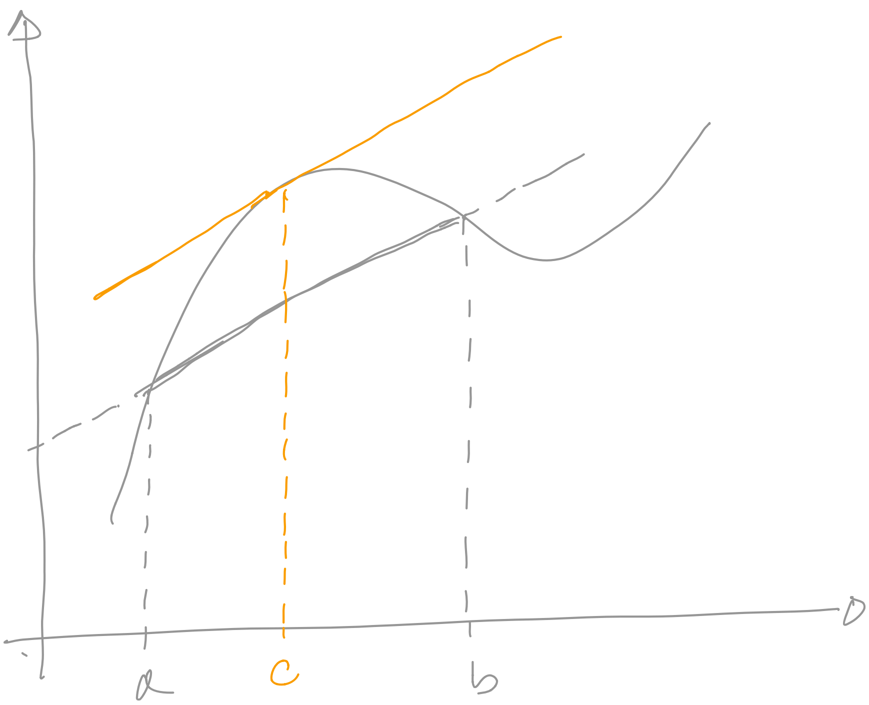
et donc

$$|x_{t+1} - x^*| < |x_t - x^*|$$

A chaque itération on réduit la distance entre x et l'état stationnaire x^*. On dit que l'application est contractante $\longrightarrow$ stabilité

Théorème des accroissements finis Pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (a et b des réels tels que $a<b$) supposée continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe un réel c dans $]a,b[$ vérifiant :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$



(1.9) Dynamique de transition

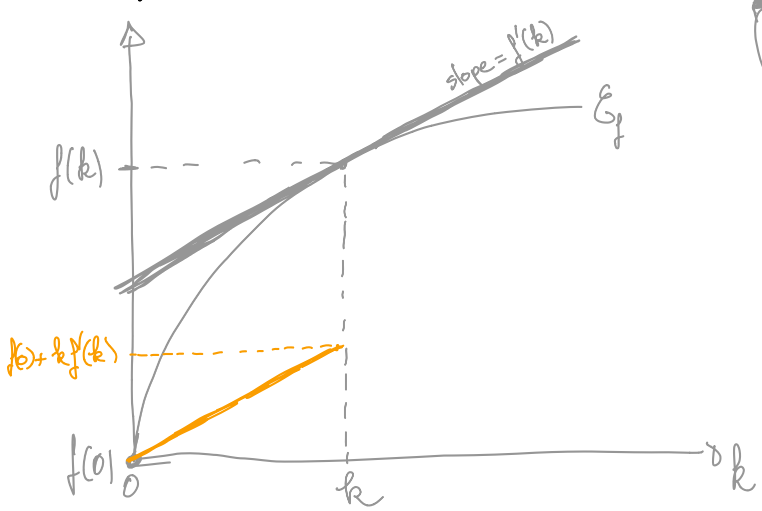
Nous avons montré qu'il existe un unique état stationnaire $k^* > 0$. On s'intéresse maintenant à la stabilité de l'état stationnaire. L'économie converge-t-elle vers l'état stationnaire pour toute condition initiale positive ?

Proposition 3 Pour toute condition initiale $k_0 > 0$, l'économie centralisée converge de façon monotone vers l'état stationnaire k^*.

Preuve La dynamique du stock de capital par tête obéit à :

$$k_{t+1} = G(k_t)$$

avec $G(k) = (1+n)^{-1}[s f(k) + (1-\delta) k]$. Nous avons déjà montré que $G'(k)$ est positif pour tout $k \in \mathbb{R}_+$. Nous pouvons commencer par montrer que $G'(k^*) < 1$, ce qui établira la stabilité locale de l'état stationnaire.



Définition Soit $f : E \to \mathbb{R}$, avec $E \subset \mathbb{R}$, une fonction différentiable. f est concave sur E si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$ on a

$$f(y) - f(x) \leq f'(x)(y-x)$$

La fonction de production intensive est concave puisque $f''(k) < 0 \ \forall\, k \in \mathbb{R}_+$. Nous avons donc :

$$f(0) - f(k) < -f'(k)\,k$$

$$\iff \quad f(k) > f(0) + k f'(k)$$

$$\iff \quad f(k) > k f'(k)$$

En particulier, à l'état stationnaire la productivité moyenne du capital doit être supérieure à la productivité marginale du capital :

$$\frac{f(k^*)}{k^*} > f'(k^*)$$

Ainsi, par définition de l'état stationnaire (voir 1.7), nous avons :

$$f'(k^*) < \frac{n+\delta}{s}$$

Dans la section (1.6) nous avons obtenu la dérivée de la fonction $G(k)$:

$$G'(k) = (1+n)^{-1}\left[s f'(k) + 1 - \delta\right]$$

À l'état stationnaire nous avons donc :

$$G'(k^*) = (1+n)^{-1}\left[s f'(k^*) + 1 - \delta\right]$$

et donc

$$G'(k^*) < (1+n)^{-1}(n + \delta + 1 - \delta)$$

$$\iff G'(k^*) < 1$$

Ce qui assure la stabilité locale de l'état stationnaire. On ne peut malheureusement pas utiliser le théorème 3 pour établir la stabilité globale, puisque $G'(k)$ n'est pas inférieur à 1 pour tout $k \in \mathbb{R}_+$. On sait, par exemple, que $\lim_{k \to 0} G'(k) = \infty$ par les conditions d'Inada.

Supposons que k_t soit inférieur à l'état stationnaire, c'est-à-dire que $k_t \in]0, k^*[$. Nous avons :

$$\begin{aligned} k_{t+1} - k^* &= G(k_t) - G(k^*) \\ &= -\int_{k(t)}^{k^*} G'(k)\,dk \\ &< 0 \qquad \text{car } G'(k) > 0 \ \forall k \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Donc si $k_t < k^*$ alors on aura aussi $k_{t+1} < k^*$.

Par ailleurs, nous savons que :

$$(1+n)k_{t+1} = sf(k_t) + (1-\delta)k_t$$

$$\iff (1+n)\left[k_{t+1} - k_t\right] = sf(k_t) + (1-\delta)k_t - (1+n)k_t$$

$$\iff (1+n)\left[k_{t+1} - k_t\right] = sf(k_t) - (n+\delta)k_t$$

$$\iff (1+n)\left[k_{t+1} - k_t\right] = k_t\left[s\frac{f(k_t)}{k_t} - (n+\delta)\right]$$

$$\iff (1+n)\underbrace{\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}}_{\text{taux de croissance de } k} = s\underbrace{\frac{f(k_t)}{k_t}}_{\text{productivité moyenne de } k} - (n+\delta)$$

$$\Rightarrow (1+n)\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} > s\frac{f(k^*)}{k^*} - (n+\delta)$$

car la productivité moyenne est une fonction décroissante de k. Finalement par définition de l'état stationnaire nous avons

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} > 0$$

Ainsi, lorsque $k_t \in]0, k^*[$ on a nécessairement $k_{t+1} \in]k_t, k^*[$. En itérant k_t convergera donc vers k^* de façon monotone ∎

(2) L'équilibre décentralisé

(2.1) Les ménages

- Un ménage est une dynastie dont la durée de vie est infinie. L'économie est peuplée d'un continuum de ménages indicés par $j \in [0,1]$. Le nombre de tête dans chaque ménage croît au taux constant $n > 0$. La population totale de l'économie à la date t est $L_t = (1+n)^t$ (nous normalisons le nombre de tête à la date 0 $L_0 = 1$).