[Pour le 5 mars 2019] (1)

[L3]

Retour au modèle de Solow

Nous reprenons le modèle vu en L2 de façon un peu plus générale. En passant nous en profitons pour introduire les modèles d'équilibre général, que vous verrez plus en détails dans le cours de micro, qui forment le cadre aujourd'hui standard pour penser la dynamique des agrégats économiques.

Une différence technique notable avec le cours de l'année dernière est que nous abandonnons le formalisme en temps continu. Nous n'utiliserons donc plus des dérivées pour caractériser la dynamique des variables d'intérêt.

(1) Version centralisée du modèle de Solow

Comme l'année dernière on suppose dans cette section que l'évolution des agrégats économique (capital physique, production, consommation, ...) est le résultat des choix d'un dictateur qui prend les décisions pour tout le monde. Dans une telle économie il n'y a pas d'échanges entre différents agents, le seul agent est le dictateur (on peut l'appeler Robinson Crusoé), il n'y a donc pas de marchés ni de prix. Dans ce chapitre on montrera que la dynamique de l'économie dans le modèle de Solow centralisé et le modèle de Solow décentralisé (où l'économie est peuplée de différents agents qui échangent sur des marchés, voir la section 2).

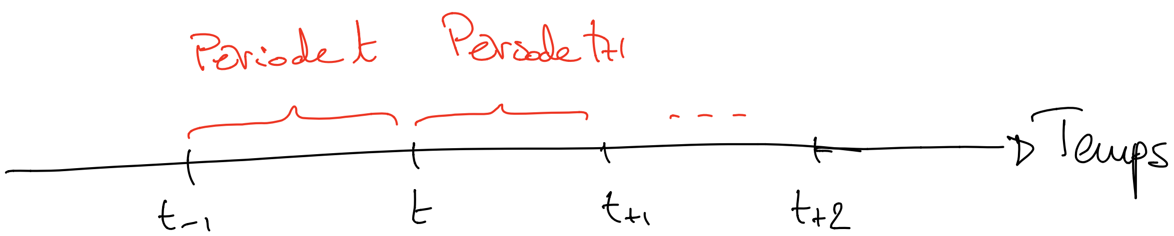
(1.1) L'économie, les ménages et le dictateur

- Le temps est discret : $t \in \mathbb{N}$. Une période, par exemple entre $t-1$ et t peut représenter une durée de temps constante arbitraire (année, trimestre, ...) qu'il conviendra de choisir lors de l'étalonnage du modèle (quand on donne des valeurs aux paramètres).
- L'économie est autarcique, comme l'île de Robinson.
- Il n'existe qu'un seul bien produit à partir de deux facteurs de production, le capital et le travail. Le bien produit à la période t, peut être consommé à la période t ou investi sous forme de capital qui sera utilisé pour produire à la période suivante.
- Chaque ménage est doté d'une unité de travail qui peut être utilisée à discrétion par le dictateur.
- Le dictateur prend toutes les décisions :
  - il utilise toute la force de travail et le capital accumulé pour produire l'unique bien
  - à chaque période il épargne une fraction constante $s \in [0,1]$ de la production pour augmenter le stock de capital, le reste est distribué uniformément aux ménages.

- Dans la suite on adopte les notations :
  - L_t le nombre de ménages (la force de travail) en période t
  - K_t le stock de capital au début de la période t qui sera utilisé pour produire à la période t
  - Y_t la production à la période t
  - C_t la consommation agrégée à la période t

On utilisera des minuscules pour les variables par tête :

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t} \quad \text{et} \quad c_t = \frac{C_t}{L_t}$$



K_t : le stock de capital utilisé en période t est le résultat du choix d'épargne en période $t-1$.

(1.2) Production

- La fonction de production

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

est une fonction de $\mathbb{R}^2_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que la fonction de production est continue et deux fois différentiable.

- La fonction de production est néo-classique :

① Rendement d'échelle constant (homogénéité de degré 1) :

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L) \quad \forall \mu > 0$$

② Les productivités marginales sont positives :

$$F_K(K,L) > 0$$
$$F_L(K,L) > 0$$

$\Rightarrow$ Ceteris paribus, une augmentation du stock de capital induit une augmentation de la production.

③ Les productivités marginales sont décroissantes :

$$F_{KK}(K,L) < 0$$
$$F_{LL}(K,L) < 0$$

$\Rightarrow$ L'augmentation de product° induite par une augmentation du stock de capital est d'autant plus faible que le stock de capital est grand.

4 Conditions d'Inada

$$\lim_{K\to\infty} F_K(K,L) = 0 \qquad \lim_{L\to\infty} F_L(K,L) = 0$$

$$\lim_{K\to 0} F_K(K,L) = +\infty \qquad \lim_{L\to 0} F_L(K,L) = +\infty$$

Supposer que la fonction de production est de type néo-classique entraîne les propriétés suivantes:

Propriété 1 Les facteurs de production sont essentiels dans le sens où $F(0,L) = F(K,0) = 0 \quad \forall\, (K,L) \in \mathbb{R}^2_+$

Preuve Par la règle de l'Hôpital et les conditions d'Inada, on montre que la productivité moyenne du capital tend vers 0 lorsque le stock de capital tend vers l'infini:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{Y}{K} = \lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = 0$$

Asymptotiquement les productivités moyenne et marginale du capital ont le même comportement. Quand le stock de capital tend vers l'infini, la production tend aussi vers l'infini (puisque la fonction de production est croissante en K) mais moins vite.

Puisque la fonction est homogène de degré 1, on a aussi

$$\frac{Y}{K} = \frac{F(K,L)}{K} = F\left(1, \frac{L}{K}\right)$$

Pour tout L fini, on a donc

$$\lim_{K\to\infty} F\left(1, \frac{L}{K}\right) = F(1,0)$$

De sorte que nous avons nécessairement :

$$F(1,0) = 0$$

Soit en multipliant par k et en exploitant à nouveau l'homogénéité de degré de la fonction de production

$$F(K,0) = 0 \qquad \forall K$$

Nous venons de montrer que la production est nulle si la quantité de travail est nulle. En ce sens, le facteur travail est essentiel à la production. De la même façon on peut montrer que le capital est essentiel à la production. ■

<u>Théorème d'Euler</u>

Soit $g(x,y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable homogène de degré k par rapport à x et y. Alors on a :

$$k.g(x,y) = g_x(x,y).x + g_y(x,y).y$$

où g_x et g_y sont les dérivés partielles de g. Ces mêmes dérivés partielles sont homogènes de degré $k-1$ par rapport à x et y.

<u>Preuve</u> Puisque la fonction g est homogène de degré k, nous avons :

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x,y) \qquad \forall \lambda \qquad (*)$$

En dérivant par rapport à λ, il vient :

$$g_x(\lambda x, \lambda y)x + g_y(\lambda x, \lambda y)y = k\lambda^{k-1} g(x,y) \quad \forall \lambda$$

En particulier pour $\lambda = 1$ nous avons donc :

$$g_x(x,y)x + g_y(x,y)y = k\,g(x,y)$$

Pour montrer que la dérivée partielle par rapport à x est homogène de degré $k-1$, dérivons (*) par rapport à x :

$$\lambda g_x(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g_x(x,y)$$

$$\iff \quad g_x(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{k-1} g_x(x,y)$$

On procède de la même façon pour montrer que la dérivée partielle par rapport à y est homogène de degré $k-1$ ■

Remarque : On généralise facilement le théorème d'Euler à une fonction de n variables homogène de degré k par rapport à $m \leq n$ de ses arguments

Propriété 2

$$\boxed{\text{Avec une fonction de production néo-classique, dans une économie en concurrence parfaite où les prix des facteurs sont donnés par les productivités marginales, les firmes ne font pas de profit.}}$$

Preuve : Si le capital et le travail sont rémunérés par :

$$R_t = F_K(K_t, L_t) \quad \text{et} \quad w_t = F_L(K_t, L_t)$$

alors par le théorème d'Euler, on a :

$$Y_t = R_t K_t + w_t L_t$$

et donc la nullité du profit. ■

<u>Propriété 3</u> - $\boxed{\text{Les productivités marginales ne dépendent que du ratio } K/L}$

<u>Preuve</u> Par le théorème d'Euler, nous savons que si F est une fonction de production néoclassique (homogène de degré 1) alors les productivités marginales sont $F_K(K,L)$ et $F_L(K,L)$ sont des fonctions homogène de degré 0 :

$$F_K(\lambda K, \lambda L) = F_K(K,L)$$
$$F_L(\lambda K, \lambda L) = F_L(K,L)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$. En particulier pour $\lambda = \frac{1}{L}$, il vient :

$$F_K(K,L) = F_K\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

$$F_L(K,L) = F_L\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$ ■

<u>Propriété 4</u> Les élasticités par rapport aux facteurs de production somment à 1 :

$$\boxed{\varepsilon_{Y/K} + \varepsilon_{Y/L} = 1}$$

9

Preuve On utilise encore le théorème d'Euler qui nous dit que

$$F(K,L) = F_K(K,L)K + F_L(K,L)L$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{Y}{K}} + \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{Y}{L}} = 1$$

5 mars 2019

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_{Y/K} + \varepsilon_{Y/L} = 1 \qquad \blacksquare$$

Propriété 5 On peut écrire la technologie sous forme intensive, c'est-à-dire exprimer la production par tête, y, en fonction du capital par tête, k

Preuve: Puisque la fonction de production est homogène de degré 1, nous avons :

$$\lambda Y = F(\lambda K, \lambda L) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

En particulier pour $\lambda = L^{-1}$, il vient

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

En adoptant la notation $f(x) = F(x, 1)$, il vient :

$$y = f(k)$$

la production par tête en fonction du capital par tête.

<u>Propriété 6</u> La fonction de production intensive, $f(k)$, hérite des propriétés de la fonction de production $F(K, L)$. On a :

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f'(k) > 0$

(iii) $f''(k) < 0$

(iv) $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$ et $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$

(v) $F_K(K, L) = f'(k)$

(vi) $F_L(K, L) = f(k) - f'(k)k$

Preuve : (i) Par définition de la technologie intensive, nous avons :

$$f(0) = F(0,1)$$

Par la propriété 1 nous obtenons directement $f(0)=0$.

(v), (ii), (iii) et (iv) Par construction de la technologie intensive nous avons diretement

$$f'(k) = F_K(K,L)$$

ou encore

$$f'(k) = F_K(k,1)$$

puisque la productivité marginale $F_K(K,L)$ st une fonction homogène de degré 0. On déduit directement la positivité de $f'(k)$ et sa décroissance, c'est-à-dire la négativité de $f''(k)$. Le point (iv) st une conséquence directe des conditions d'Inada relatives à $F_K(K,L)$. Pour le dernier point (vi) on utilise une nouvelle fois le théorème d'Euler :

$$Y = F_K(K,L)K + F_L(K,L)L$$

soit en divisant les deux membres par L :

$$y = F_K(K,L)k + F_L(K,L)$$

Puisque la productivité marginale du capital ne dépend que du ratio capital/travail, nous avons de façon équivalente :

$$y = F_K(k,1)k + F_L(K,L)$$

ou encore :

$$y = f'(k)k + F_L(K,L)$$

Ainsi, nous obtenons la productivité marginale du travail comme :

$$F_L(K,L) = f(k) - f'(k)k$$

Elle ne dépend, nous le savions déjà, que du stock de capital par tête. ■

(1.3) La contrainte de ressource et les lois d'évolution du travail et du capital

- L'économie est autarcique (on ne peut consommer ou investir un bien venant d'ailleurs) et ne produit qu'un seul bien en quantité Y. Ainsi, à une période t quelconque la somme de la consommation agrégée, C_t, et de l'investissement agrégé, I_t, ne peut dépasser la production, Y_t. On a donc nécessairement :

$$C_t + I_t \leq Y_t \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

Il s'agit de la contrainte de ressource à laquelle le dictateur doit se soumettre. En divisant les deux membres de l'inégalité par la population on peut écrire la contraintes de ressource sous forme intensive :

$$c_t + i_t \leq y_t \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

- On suppose que la population croît au taux constant $n>0$. Ainsi la dynamique de la force de travail obéit à l'équation récurrente suivante :

$$L_t = \underbrace{(1+n)}_{\text{Facteur de croissance}} L_{t-1} \qquad \forall t \in \mathbb{N}^*$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $1+n$, dont le terme général est obtenu en itérant vers le passé :

$$L_t = (1+n)^t L_0 \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

Pour alléger les notations, on supposera par la suite que $L_0 = 1$.

- On suppose que le stock de capital physique se déprécie au taux constant $\delta \in [0,1]$. Le stock de capital au début de la période suivante est donné par la partie non dépréciée du stock de la période courante augmenté de l'investissement contemporain :

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$$

stock de capital au début de la période $t+1$ — stock de capital au début de la période t — investissement en période t

Pour caractériser l'évolution du stock de capital par tête, on divise les deux membres par L_t :

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = (1-\delta)\frac{K_t}{L_t} + \frac{I_t}{L_t}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \cdot \frac{L_{t+1}}{L_t} = (1-\delta) k_t + i_t$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(1+n) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t}$$

Rappel Le développement limité en 0 de $(1+x)^{-1}$ est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

où la notation $o(x^n)$ représente un terme résiduel qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 plus rapidement que la fonct° x^n.

Remarque 1 La loi d'évolution du stock de capital physique par tête ne ressemble pas à ce que nous avions l'année dernière avec la formulation en temps continu du modèle de Solow. Il est possible de s'en rapprocher au prix de quelques approximations. En divisant les deux membres par $1+n$, il vient

$$k_{t+1} = \frac{1-\delta}{1+n} k_t + \frac{i_t}{1+n}$$

Lorsque n est petit (ou tend vers 0) on peut approximer cette équation par

$$k_{t+1} \simeq (1-\delta)(1-n) k_t + i_t$$

$$\Longleftrightarrow \quad k_{t+1} \simeq (1-n-\delta+n\delta)\, k_t + i_t$$

En négligeant le terme croisé, il vient :

$$k_{t+1} \simeq (1-n-\delta)\, k_t + i_t$$

soit encore :

$$\boxed{\Delta k_{t+1} \simeq i_t - (n+\delta)\, k_t}$$

où $\Delta = 1-L$ est l'opérateur différence première, $\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$. On retrouve donc approximativement ce que nous avions l'année dernière, et $n+\delta$ peut s'interpréter comme une approximation du taux de dépréciation effectif du capital par tête. Nous voyons ici l'intérêt de la formalisation en temps continu, qui est plus simple sans reposer sur des approximations.

(1.4) Dynamiques du capital et de la consommation

En réécrivant la loi d'évolution du stock de capital sous la forme

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$$

et en substituant la contrainte de ressource qui peut s'écrire :

$$I_t \leq Y_t - C_t$$

ainsi que la fonction de production $Y=F(K,L)$, on obtient :

$$K_{t+1}-K_t \leq F(K_t,L_t)-\delta K_t - C_t$$

La variation du stock de capital agrégé ne peut être supérieur à la production agrégée nette de la dépréciation du capital moins la consommat° agrégée. Cette contrainte peut s'exprimer en terme intensif sous la forme :

$$(1+n)\,k_{t+1}-k_t \leq f(k_t)-\delta k_t - c_t$$

Remarque 1 En utilisant les mêmes approximations que dans la section précédente, on obtient :

$$\underbrace{k_{t+1}-k_t}_{\text{variation du stock de capital par tête}} \lesssim \underbrace{f(k_t)-(n+\delta)\,k_t}_{\text{product° par tête nette de la dépréciat°}} - \underbrace{c_t}_{\text{consommat° par tête.}}$$

Remarque 2 On présente souvent le modèle en remplaçant l'inégalité par une égalité. Tant que le dictateur cherche à ne pas gâcher des ressources, il a intérêt à saturer la contrainte.

(1.5) Allocation réalisable et allocation « optimale »

Définition 1 Une allocation réalisable est une suite $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ qui satisfait la contrainte de ressource :

$$(1+n)k_{t+1} \leq f(k_t)+(1-\delta)k_t - c_t$$

avec la condition initiale k_0 donnée.