Exercice 10 (1) L'estimateur des MCO pour le paramètre b est

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2}$$

(2) En substituant le modèle générateur des données, $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$, dans l'expression de l'estimateur des MCO, il vient :

$$\hat{b} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2}$$

(3) Posons $f_U(u)$ la densité marginale de U, $f_V(v)$ la densité marginale de V, $f_{U,V}(u,v)$ la densité jointe du couple (U,V). On a :

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,du$$

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,dv$$

et la densité conditionnelle :

$$f_{V|U}(v;u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)}$$

$$f_{V|U}(v;u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{\int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,dv}$$

L'espérance conditionnelle est donc :

$$\mathbb{E}[V|U] = \int_{\mathbb{R}} \cancel{v} \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)}\,dv \equiv \psi(U)$$

(4) On a

$$\mathbb{E}[\psi(U)] = \int_{\mathbb{R}} \psi(u) f_U(u)\,du$$

en substituant l'espérance conditionnelle

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[\psi(U)] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} v\, f_{V|U}(v)\, f_U(u)\, dv\,du$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[\psi(U)] = \int_{\mathbb{R}} v \left(\int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\, du \right) dv$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[\psi(U)] = \int_{\mathbb{R}} v f_V(v)\, dv = \mathbb{E}[V]$$

Ce résultat (il s'agit du théorème des espérances itérées) nous dit que l'espérance de V peut se calculer comme la « moyenne » de l'espérance de V|U (pondérée par la densité de U).

Ce résultat permet d'évaluer l'espérance d'une variable aléatoire V sans explicitement connaître sa densité. Il suffit de connaître la densité conditionnelle V|U et la densité marginale de X.

(5) On a :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_t | x_s]]$$

par le théorème des espérances itérées, et

donc :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[0] = 0$$

puisque par hypothèse $\mathbb{E}[\varepsilon|x] = 0$. ~~[illegible]~~

(6) En utilisant la même astuce :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varepsilon_t x_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_t x_s | x_s]] \\ &= \mathbb{E}[x_s \mathbb{E}[\varepsilon_t | x_s]] \\ &= \mathbb{E}[x_s \times 0] \\ &= 0 \qquad \forall (t,s)\end{aligned}$$

car x_s est dans l'ensemble de conditionnement

En conséquence, la covariance entre ε et x est nulle.

(7) En utilisant toujours la même astuce, on montre que ε_t est conditionnellement homoscédastique.

$$\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]$$ car ε est d'espérance nulle

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | x_s]\right] \quad \forall s$$

$$= \mathbb{E}[\sigma_\varepsilon^2]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$$

(8) On utilise encore le théorème des espérances itérées :

$$\mathbb{E}[\hat{b}] - b = \mathbb{E}\left[\frac{\sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(x_t - \bar{x})}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} \middle| X\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} \mathbb{E}[\varepsilon_t - \bar{\varepsilon} | X]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} \times 0\right] = 0$$

l'estimateur des MCO est donc sans biais si les variables explicatives (aléatoires) sont indépendantes des résidus.

Exercice 11

(1) L'estimateur est biaisé car la variable explicative est corrélée avec ε (voir l'exercice 10).

(2) On a

$$\underset{T\to\infty}{\text{plim}}\ \hat{\beta} = \beta + \frac{\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(x_t - \bar{x})}{\underset{T\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}$$

$$= \beta + \frac{\text{Cov}(x, \varepsilon)}{\mathbb{V}[x]} \neq \beta$$

l'estimateur des MCO ne converge donc pas en probabilité vers la vraie valeur des paramètres.

(3) La première équation nous dit que la somme des résidus estimés doit être nulle. Nous avons déjà cette condition avec l'estimateur des MCO.
Le membre de gauche de la seconde équation est un estimateur (convergent) de la covariance entre z et x, qui par hypothèse doit être nulle.

(4) De la première équation on déduit (comme d'habitude) que :

$$\hat{a}_{IV} = \bar{y} - \hat{b}_{IV}\bar{x}$$

Pour la seconde équation, on a de façon équivalente (en substituant $\hat{a}_{IV}$) :

$$\sum_{t=1}^{T} z_t \left(y_t - \bar{y} + \hat{b}_{IV}\bar{x} - \hat{b}_{IV}x_t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} z_t (y_t - \bar{y}) = \hat{b}_{IV} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x}) z_t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y}) = \hat{b}_{IV} \sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})$$

$$\Leftrightarrow \hat{b}_{IV} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})}$$

(5) En substituant le DGP, qui nous dit que

$$y_t - \bar{y} = (x_t - \bar{x})\beta + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$$

dans la définition de $\hat{b}_{IV}$, il vient :

$$\hat{b}_{IV} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})}$$

$$= \beta + \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})}$$

Or

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x}) \neq 0$$

et

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (z_t - \bar{z})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) = 0$$

On a donc :

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \hat{b}_{IV} = \beta$$

$\hat{b}_{IV}$, l'estimateur à variable instrumentale, est un estimateur convergent.

(b) On a :

$$\sqrt{T}(\hat{b}_{IV}-\beta) = \frac{T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}(z_t-\bar{z})\varepsilon_t}{T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(z_t-\bar{z})(x_t-\bar{x})}$$

$$\underset{\text{quand } T \text{ grand}}{\sim} \frac{T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}(z_t-\bar{z})\varepsilon_t}{\mathrm{Cov}(z,x)}$$

Or $\mathbb{V}\left[T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}(z_t-\bar{z})\varepsilon_t\right] = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}\left[(z_t-\bar{z})^2\right]\mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\right]$

en supposant que les z (comme les x) sont indépendants (d'une observat° à l'autre) et en exploitant l'orthogonalité entre z et ε.

$$\text{Lo } \mathbb{V}\left[T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}(z_t-\bar{z})\varepsilon_t\right] = \mathbb{V}[z].\sigma_\varepsilon^2$$

Ainsi la variance asymptotique de l'estimateur $\hat{b}_{IV}$ est

$$\mathbb{V}_\infty\left[T^{-\frac{1}{2}}(\hat{b}_{IV}-\beta)\right] = \frac{\mathbb{V}[z].\sigma_\varepsilon^2}{\mathrm{Cov}(z,x)^2}$$

On remarque que l'estimateur à variable instrumentale est d'autant plus précis que l'instrument (z) est corrélé avec la variable explicative (x).

Dans le cas de l'estimateur des MCO, on a

$$\mathbb{V}_\infty\left[T^{-\frac{1}{2}}(\hat{b}_{MCO}-\beta)\right] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mathbb{V}[x]}$$

Ainsi le ratio des deux variances asymptotiques :

$$\frac{V_\infty\left[T^{2}(b_{IV}-\beta)\right]}{V_\infty\left[T^{-\frac{1}{2}}(\hat{b}_{MCO}-\beta)\right]} = \frac{V(x)V(z)}{Cov(x,z)^2} = \frac{1}{\rho(x,z)^2} \geq 1$$

corrélation

car une corrélation est nécessairement dans l'intervalle $[-1, 1]$.

L'estimateur par variables instrumentales est généralement moins précis que l'estimateur des MCO.

Exercice 12

(1) Le modèle empirique, sous forme matricielle, est

$$\underset{T\times 1}{Y} = \underset{T\times K}{X}\ \underset{K\times 1}{b} + \underset{T\times 1}{\epsilon}$$

La condition d'identification de l'estimateur à variables instrumentales est

$$\underset{K\times T}{Z'}\left(\underset{T\times 1}{Y} - \underset{T\times K}{X}\ \underset{K\times 1}{\hat{b}_{IV}}\right) = 0 \quad (*)$$

Nous sommes en présence d'un système de K équations linéaires avec K inconnues ($\hat{b}_{IV}$).
De façon équivalente, nous avons :

$$Z'Y = Z'X\hat{b}_{IV}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{b}_{IV} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

(2) comme dans l'exercice précédent

(3) Si le nombre d'instruments est supérieur au nombre de variables explicatives (K), on ne peut résoudre le système (*) de façon unique (il y a plus d'équations que d'inconnues).

Plusieurs solutions :

① Minimiser une forme quadratique basée sur $Z'(X - X\beta)$ par rapport à b

$\rightarrow$ GMM

② Double MC

- ⓐ- Régresser les variables explicatives sur les instruments.
- ⓑ- utiliser les prédicteurs de X comme instruments.

→ On estime le modèle (multivarié)

$$\underset{T\times K}{X} = \underset{T\times L}{Z}\underset{L\times 1}{\delta} + v$$ L>K le nombre d'instruments

↳ $\hat{\delta} = (Z'\cancel{Z})^{-1} Z'X$

↳ $\hat{X} = Z(Z'Z)^{-1} Z'X$ le prédicteur de X utilisé comme instrument

$$\hat{b}_{2MC} = (\hat{X}'X)^{-1}\hat{X}'Y$$

$$(=) \quad \hat{b}_{2MC} = \left(X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X\right)^{-1} X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y$$