Exercice 9

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $-1 < \rho < 1$.

(1) La densité jointe est

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (2\pi)^{-1} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x_1-\mu_1, x_2-\mu_2) \times \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1-\mu \\ x_2-\mu \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2(x_1-\mu_1) - \rho\sigma_1\sigma_2(x_2-\mu_2) \\ \sigma_1^2(x_2-\mu_2) - \rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1) \end{pmatrix}$$

$$(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left\{ \sigma_2^2(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x_2-\mu_2)^2 - \rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) \right\}$$

$$\Leftrightarrow (x_1-\mu_1, x_2-\mu_2) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right\}$$

Finalement

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{ \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \cancel{2}\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right\}}$$

(2) Montrons que $X_1 | X_2$ et X_2 sont aussi des variables aléatoires normales.

Notons

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right\}$$

le terme sous l'exponentielle. En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, il vient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\}$$

$$\iff \mathcal{A} = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

Puisque $e^{A+B} = e^A . e^B$, il vient :

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_2}(x_2-\mu_2)^2}$$

En notant que

$$\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_1}\left(x_1 - \mu_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right)$$

on a finalement :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \underbrace{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left(x_1-\mu_1-\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right)^2}}_{f_{X_1|X_2}(x_1)} \times \underbrace{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2}}_{f_{X_2}(x_2)}$$

On peut écrire la densité jointe comme le produit d'une densité conditionnelle et d'une densité marginale. On reconnaît des densité de lois normales

(3) On a

$$\mathbb{E}[X_1|X_2] = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$$

et

$$\mathbb{V}[X_1 | X_2] = \sigma_1^2 (1 - \rho^2)$$

directement à partir de l'expression de la densité conditionnelle. On note que la variance conditionnelle est plus faible que la variance inconditionnelle (ou marginale) :

$$\mathbb{V}[X_1 | X_2] = \sigma_1^2 (1-\rho^2) < \sigma_1^2 = \mathbb{V}[X_1]$$

d'autant plus que les variables X_1 et X_2 sont corrélés. C'est intuitif puisqu'en conditionnant on élimine de l'aléa.

(4) On a

$\mathbb{V}[a+X] = \mathbb{V}[X]$
$\mathbb{V}[bX] = b^2 \mathbb{V}[X]$

$$a + bX_2 \sim \mathcal{N}(a + \mu_2, \sigma_2^2)$$

$$Y = a + bX_2 + \varepsilon \sim \mathcal{N}(a+\mu_2, \sigma_2^2 + \sigma_\varepsilon^2)$$

car la somme de deux variables aléatoires normales est normale, l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme des espérances, et la variance d'une somme de variables aléatoires non corrélées est la somme des variances.

(5) La densité conditionnelle de $X_1 | X_2$ est elle aussi gaussienne

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim \mathcal{N}(a + b x_2, \sigma_\varepsilon^2)$$

la distribution des tailles est stationnaire (ne change pas au cours du temps)

(6) $\sigma_1 \simeq \sigma_2$ $\quad \mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu$

$\hookrightarrow \mathbb{E}[X_1 | X_2 = x_2] = \mu + \rho(x_2 - \mu)$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X_1 | X_2 = x_2] = (1-\rho)\mu + \rho x_2$

< 1