

ÉCONOMÉTRIE APPROFONDIE

(Session de rattrapage)

12 juin 2026

Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps de faire des phrases.

EXERCICE 1. On suppose que les données sont générées par le modèle suivant :

$$y_i = x_{i,1}\beta_1 + \dots x_{i,K}\beta_K + \varepsilon_i$$

où $x_{i,k}$, pour $k = 1, \dots, K$ sont des variables explicatives déterministes, β_k , pour $k = 1, \dots, K$, sont des paramètres réels, ε_i une variable aléatoire i.i.d. centrée de variance σ_ε^2 . **(1)** Donner la représentation matricielle de ce modèle. **(2)** Définir et donner l'expression de l'estimateur des MCO du vecteur de paramètres β , que l'on notera $\hat{b}$ (en montrant comment on arrive à cette expression et en explicitant les hypothèses nécessaires pour que cet estimateur existe). **(3)** Montrer que cet estimateur est sans biais. **(4)** Calculer la variance de cet estimateur. **(5)** Énoncer le théorème de Gauss-Markov et montrer que l'estimateur des MCO est l'estimateur le plus efficace dans la classe des estimateurs linéaires et sans biais (BLUE).

EXERCICE 2. On considère le modèle générateur des données :

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

où β est un paramètre réel, x_i une variable explicative déterministe non nulle, et ε_i une variable aléatoire d'espérance nulle. Les erreurs sont indépendantes mais hétéroscédastiques :

$$\mathbb{V}[\varepsilon_i] = \sigma^2 w_i$$

où les $w_i > 0$ sont des poids connus et $\sigma^2 > 0$. Le modèle empirique est :

$$y_i = b x_i + \epsilon_i$$

(1) Donner l'expression de l'estimateur des MCO $\hat{b}$ de β . Cet estimateur est-il sans biais? Justifier. **(2)** Calculer la variance de $\hat{b}$. **(3)** Comment, en pratique, pourrait-on détecter la présence d'hétéroscédasticité dans les données? Citer au moins un test et en décrire le principe. **(4)** L'estimateur des MCO est-il efficace? Justifier. **(5)** Proposer une transformation des données conduisant à un modèle à erreurs homoscédastiques, et en déduire un estimateur efficace $\hat{b}_{\text{MCG}}$ de β . De quel estimateur s'agit-il? **(6)** Calculer

la variance de $\hat{b}_{\text{MCO}}$ et la comparer à celle de $\hat{b}$. Conclure. **(7)** Que faire si les poids w_i ne sont pas connus ?

RAPPEL (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous réels $a_1, \dots, a_N$ et $c_1, \dots, c_N$:

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i c_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N c_i^2 \right)$$

EXERCICE 3. On suppose que le salaire (en logarithme) d'un individu i est généré par le modèle :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i$$

où y_i est le (log) salaire, x_i le nombre d'années d'études, z_i une mesure des capacités (« talent ») de l'individu, et ε_i une variable aléatoire i.i.d. centrée, de variance σ_ε^2 , non corrélée à x_i et z_i . Les variables x_i et z_i sont aléatoires, i.i.d., centrées, de variances σ_x^2 et σ_z^2 , et l'on note $\sigma_{xz} = \text{cov}(x_i, z_i) \neq 0$ (les individus les plus talentueux font en moyenne des études plus longues).

Malheureusement, l'économètre n'observe pas le talent z_i . Il estime donc le modèle empirique :

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + u_i$$

(1) Écrire le terme d'erreur u_i du modèle empirique en fonction de z_i et ε_i . **(2)** Calculer la covariance entre le régresseur x_i et l'erreur u_i . Qu'en déduit-on sur les propriétés de l'estimateur des MCO ? **(3)** On note $\hat{b}_1$ l'estimateur des MCO de la pente. Montrer que :

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_1 = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x^2}$$

Interpréter et commenter ce résultat (signe du biais, cas où il disparaît). **(4)** On suppose qu'il existe une variable g_i (par exemple le nombre d'années d'études du parent de l'individu) corrélée avec x_i ($\text{cov}(g_i, x_i) = \sigma_{gx} \neq 0$) mais non corrélée avec z_i ni avec ε_i . Proposer un estimateur convergent de β_1 et montrer sa convergence. **(5)** Quelles sont les deux conditions que doit satisfaire la variable g_i pour être un bon instrument ? Cet estimateur est-il sans biais ?