

ÉCONOMÉTRIE APPROFONDIE

Jeudi 18 décembre 2025

Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps de faire des phrases.

EXERCICE 1. On suppose que les données sont générées par le modèle suivant :

$$y_i = x_{i,1}\beta_1 + \dots + x_{i,K}\beta_K + \varepsilon_i$$

où $x_{i,k}$, pour $k = 1, \dots, K$ sont des variables explicatives déterministes, β_k , pour $k = 1, \dots, K$, sont des paramètres réels, ε_i une variable aléatoire i.i.d. centrée de variance σ_ε^2 . **(1)** Donner la représentation matricielle de ce modèle. **(2)** Définir et donner l'expression de l'estimateur des MCO du vecteur de paramètres β , que l'on notera \hat{b} (en montrant comment on arrive à cette expression et en explicitant les hypothèses nécessaires pour que cet estimateur existe). **(3)** Montrer que cet estimateur est sans biais. **(4)** Calculer la variance de cet estimateur. **(5)** Pourquoi l'estimateur des MCO a-t-il une variance? **(6)** Montrer que l'estimateur des MCO \hat{b} converge en probabilité vers β .

EXERCICE 2. On considère le modèle

générateur des données suivant :

$$y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$$

pour $i = 1, \dots, N$, avec β un vecteur colonne de paramètres réels, et x_i un vecteur ligne de variables explicatives déterministes. On suppose que les erreurs ε_i sont normalement distribuées et que

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Omega)$$

où Ω est une matrice symétrique et définie positive. On considère le modèle empirique :

$$y_i = x_i b + \varepsilon_i$$

(1) L'estimateur des MCO, \hat{b} , est-il un estimateur sans biais? Justifier. **(2)** Calculer la variance de l'estimateur des MCO. **(3)** L'estimateur des MCO est-il efficace parmi la classe des estimateurs linéaires et sans biais? Justifier. **(4)** Proposer un estimateur efficace et calculer sa variance, en supposant que la matrice Ω est connue. **(5)** Que faire si la matrice Ω est inconnue? Proposez un nouvel estimateur. **(6)** Est-il possible d'estimer ce modèle par maximum de vraisemblance?

EXERCICE 3. Sur le marché d'un bien la demande et l'offre à la date t sont données

par :

$$\begin{cases} y_t^d &= \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 R_t + u_t \\ y_t^o &= \gamma_0 + \gamma_1 P_t + \gamma_2 W_t + v_t \end{cases} \quad (1)$$

où y_t^d et y_t^o mesurent la demande et l'offre de bien, P_t le prix du bien, R_t le revenu des consommateurs, W_t les coûts de production, u_t et v_t sont des variables aléatoires iid, centrées, de variances σ_u^2 et σ_v^2 et non corrélées, qui s'interprètent comme des chocs de demande et d'offre. Le système d'équation 1 est le modèle structurel. On suppose que les échanges ne se font qu'à l'équilibre, c'est à dire lorsque la quantité demandée est égale à la quantité offerte. On suppose que les coûts de production et le choc de demande sont orthogonaux. On suppose que la variable de revenu est orthogonale aux chocs. **(1)** Quels sont les signes attendus des paramètres? **(2)** Calculer le prix d'équilibre pour montrer qu'il s'agit d'une variable aléatoire. **(3)** Un économètre souhaite estimer l'équation de demande par les MCO. Pensez-vous que cela soit une bonne idée? Justifier. **(4)** Proposer une méthode d'estimation permettant d'obtenir un estimateur convergent des paramètres de l'équation de demande. **(5)** Cet estimateur est-il sans biais?