ÉCONOMÉTRIE APPROFONDIE

Mercredi 13 décembre 2023

Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps de faire des phrase.

EXERCICE 1. On suppose que les données sont générées par le modèle suivant :

$$y_i = x_{1,i}\beta_1 + \ldots x_{K,i}\beta_K + \varepsilon_i$$

où $x_{k,i}$, pour $k = 1, \ldots, K$ sont des variables explicatives déterministes, β_k, pour $k = 1, \ldots, K$, sont des paramètres réels, ε_i une variable aléatoire centrée de variance σ_ε^2. **(1)** Expliciter les matrices et vecteurs dans la représentation matricielle équivalente du modèle :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

(2) Définir et donner l'expression de l'estimateur des MCO de β (en montrant comment on arrive à cette expression et en explicitant les hypothèses nécessaires pour que cet estimateur existe). **(3)** Montrer que cet estimateur est sans biais. **(4)** Calculer la variance de cet estimateur. **(5)** Pourquoi l'estimateur des MCO a t-il une variance ?

EXERCICE 2. On considère le modèle suivant :

$$y_i = \mu + \varepsilon_i$$

pour $i = 1, \ldots, N$ avec μ un paramètre réel et ε_i une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et de variance σ_i^2. On suppose que $\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = \bar{\sigma}^2 < \infty$. Le modèle empirique est :

$$y_i = a + u_i$$

(1) Calculer l'estimateur des MCO de a. **(2)** Quelle est l'espérance de $\hat{a}_{\text{MCO}}$? **(3)** Calculer la variance de $\hat{a}_{\text{MCO}}$. **(4)** La limite en probabilité de $\hat{a}_{\text{MCO}}$ lorsque N tend vers l'infini, est-elle définie ? Si oui, quelle est cette limite ? **(5)** Pourquoi cet estimateur n'est-il pas efficace ? **(6)** Définir et donner l'expression de l'estimateur des MCG de a. Cet estimateur est-il un estimateur sans biais de μ ? **(7)** Calculer la variance de $\hat{a}_{\text{MCG}}$. **(8)** Comparer les variances de $\hat{a}_{\text{MCO}}$ et $\hat{a}_{\text{MCG}}$. Conclure.

RAPPEL *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels positifs, alors la moyenne arithmétique des α_i est plus grande que la moyenne harmonique des α_i :*

$$\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} > \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

EXERCICE 3. Soit le modèle :

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$$

avec β un paramètre réel et

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \nu_t$$

où ν_t est une variable aléatoire centrée de variance σ_ν^2 et les paramètres réels φ_1, φ_2 sont tels que les moments d'ordre 2 (la variance et la fonction d'autocorrélation) de ε_t sont bien définis. On peut montrer, cela fera l'objet d'un cours au second semestre que la fonction d'autocorrélation de ε, $\rho(k)$, est non nulle est tend vers zero quand k tend vers l'infini (la corrélation entre ε_t et ε_{t-k} se rapproche de zéro quand k devient assez grand). On suppose que les valeurs de φ_1 et φ_2 sont connues. **(1)** L'estimateur des MCO pour β est-il un estimateur efficace ? Pourquoi ? **(2)** Proposer une transformation des données, c'est-à-dire des variables $\tilde{y}_t$ et $\tilde{x}_t$, telle que l'estimation de :

$$\tilde{y}_t = b\tilde{x}_t + \eta_t$$

par les MCO délivre un estimateur sans biais et efficace de β. **(3)** De quel estimateur s'agit-il ? **(4)** Que faire si les paramètres φ_1 et φ_2 ne sont pas connus ?