

# ÉCONOMÉTRIE APPROFONDIE

Mercredi 13 décembre 2023

*Les réponses non commentées ou insuffisamment détaillées ne seront pas considérées. Prenez le temps de faire des phrases.*

**EXERCICE 1.** On suppose que les données sont générées par le modèle suivant :

$$y_i = x_{1,i}\beta_1 + \dots + x_{K,i}\beta_K + \varepsilon_i$$

où  $x_{k,i}$ , pour  $k = 1, \dots, K$  sont des variables explicatives déterministes,  $\beta_k$ , pour  $k = 1, \dots, K$ , sont des paramètres réels,  $\varepsilon_i$  une variable aléatoire centrée de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . **(1)** Expliciter les matrices et vecteurs dans la représentation matricielle équivalente du modèle :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

**(2)** Définir et donner l'expression de l'estimateur des MCO de  $\beta$  (en montrant comment on arrive à cette expression et en explicitant les hypothèses nécessaires pour que cet estimateur existe). **(3)** Montrer que cet estimateur est sans biais. **(4)** Calculer la variance de cet estimateur. **(5)** Pourquoi l'estimateur des MCO a-t-il une variance ?

**EXERCICE 2.** On considère le modèle suivant :

$$y_i = \mu + \varepsilon_i$$

pour  $i = 1, \dots, N$  avec  $\mu$  un paramètre réel et  $\varepsilon_i$  une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et de variance  $\sigma_i^2$ . On suppose que  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = \bar{\sigma}^2 < \infty$ . Le modèle empirique est :

$$y_i = a + u_i$$

**(1)** Calculer l'estimateur des MCO de  $a$ . **(2)** Quelle est l'espérance de  $\hat{a}_{\text{MCO}}$ ? **(3)** Calculer la variance de  $\hat{a}_{\text{MCO}}$ . **(4)** La limite en probabilité de  $\hat{a}_{\text{MCO}}$  lorsque  $N$  tend vers l'infini, est-elle définie? Si oui, quelle est cette limite? **(5)** Pourquoi cet estimateur n'est-il pas efficace? **(6)** Définir et donner l'expression de l'estimateur des MCG de  $a$ . Cet estimateur est-il un estimateur sans biais de  $\mu$ ? **(7)** Calculer la variance de  $\hat{a}_{\text{MCG}}$ . **(8)** Comparer les variances de  $\hat{a}_{\text{MCO}}$  et  $\hat{a}_{\text{MCG}}$ . Conclure.

**RAPPEL** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des nombres réels positifs, alors la moyenne arithmétique des  $\alpha_i$  est plus grande que la moyenne harmonique des  $\alpha_i$  :

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} > \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

**EXERCICE 3.** Soit le modèle :

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$$

avec  $\beta$  un paramètre réel et

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \nu_t$$

où  $\nu_t$  est une variable aléatoire centrée de variance  $\sigma_\nu^2$  et les paramètres réels  $\varphi_1, \varphi_2$  sont tels que les moments d'ordre 2 (la variance et la fonction d'autocorrélation) de  $\varepsilon_t$  sont bien définis. On peut montrer, cela fera l'objet d'un cours au second semestre que la fonction d'autocorrélation de  $\varepsilon$ ,  $\rho(k)$ , est non nulle et tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini (la corrélation entre  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_{t-k}$  se rapproche de zéro quand  $k$  devient assez grand). On suppose que les valeurs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont connues. **(1)** L'estimateur des MCO pour  $\beta$  est-il un estimateur efficace? Pourquoi? **(2)** Proposer une transformation des données, c'est-à-dire des variables  $\tilde{y}_t$  et  $\tilde{x}_t$ , telle que l'estimation de :

$$\tilde{y}_t = b\tilde{x}_t + \eta_t$$

par les MCO délivre un estimateur sans biais et efficace de  $\beta$ . **(3)** De quel estimateur s'agit-il? **(4)** Que faire si les paramètres  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ne sont pas connus?