CROISSANCE

(CORRECTION DE LA FICHE DE TD N°3)

Stéphane Adjemian [*]

Le 18 septembre 2021 à 13:51

EXERCICE 1 **[Retour sur la règle d'or]** Écrivons la loi d'évolution du capital par tête $k(t) = K(t)/L(t)$. Commençons par diviser les deux membres de l'équation décrivant l'évolution du stock de capital agrégé dans l'économie par le nombre de tête $L(t)$:

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{Y}{L} - \delta\frac{K}{L}$$

En substituant la définition de la technologie et en notant que $\alpha + 1 - \alpha = 1$, il vient :

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha+(1-\alpha)}} - \delta k$$

soit de façon équivalente :

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} - \delta k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{L} = sk^{\alpha} - \delta k \tag{1}$$

Nous cherchons à décrire la loi d'évolution de k. Dans la dernière équation, le capital intensif apparaît bien en niveau sur le membre de droite, mais dans le membre de gauche nous avons la variation du stock de capital agrégé rapporté à la taille de la population alors que nous aimerions avoir la variation du capital par tête. Par définition du capital par tête, nous avons :

$$\dot{k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K}{L}\right)$$

en vertu des formules usuelles de dérivation, il vient :

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}L}{L^2} - \frac{K\dot{L}}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L}$$

[*]Université du Maine, Gains. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

$$\Leftrightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

car la population croît au taux constant n. Nous pouvons donc exprimer la variation du stock de capital agrégé rapporté à la taille de la population en fonction de la variation du stock de capital intensif et du niveau du stock de capital intensif. Par substitution dans l'équation 1 il vient :

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + \delta)k$$

Cette équation différentielle non linéaire décrit l'évolution du stock de capital par tête dans l'économie. Le stock de capital par tête s'accroît si et seulement si l'investissement par tête est suffisant pour « couvrir » la dépréciation du capital intensif.

(2) L'état de cette économie est complètement décrit par le capital intensif (si on connaît k on peut déterminer le produit par tête, y, via la fonction de production, la consommation par tête, c, via la règle $c = (1 - s)y$ et par complémentarité l'investissement par tête, $i = sy$). L'économie est à son état stationnaire lorsque les variables intensives ne varient plus, c'est-à-dire lorsque le capital par tête ne varie plus (puisque cette variable « résume » l'ensemble de l'économie). Formellement, on cherche le niveau de capital par tête k^* tel que $\dot{k}$ soit nul, c'est-à-dire tel que :

$$s\left[k^*\right]^{\alpha} = (n + \delta)k^*$$

À l'état stationnaire, le volume de l'investissement en capital physique par tête doit égaliser la dépréciation du capital physique par tête. Une première solution triviale est $k^* = 0$. On ne considère pas cette solution car il s'agit d'une situation dégénérée, dans le sens où l'économie n'existe pas à l'état stationnaire (toutes les variables sont nulles). De plus on peut montrer que cet état stationnaire, qualifié de trivial, n'est pas stable dans ce modèle. Après une variation infinitésimale du stock de capital physique par tête, on ne revient jamais à l'état stationnaire trivial [1]. Si $k^* > 0$, en divisant les deux membres de l'équation par $[k^*]^{\alpha}$, il vient :

$$k^* = \left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En substituant dans la technologie intensive Cobb-Douglas, on obtient directement le niveau d'état stationnaire du produit par tête :

$$y^* = \left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Sachant que le niveau de la consommation est une fraction constante, $1 - s$, du produit, on obtient l'état stationnaire de la consommation :

$$c^* = (1 - s)\left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On voit qu'une augmentation permanente du taux d'épargne déplace vers le haut le niveau de long terme [2] du capital physique et du produit intensifs. Dans

1. Vous pouvez établir ce point graphiquement.

2. Ici on parle indifféremment de niveau de long terme et d'état stationnaire car celui-ci est globalement stable (ce que vous pouvez également établir graphiquement).

une économie où les ménages accumulent plus de capital, on atteint un niveau de long terme plus élevé.

(3) Une augmentation du taux d'épargne a un effet ambigu sur le niveau de long terme de la consommation. Considérons deux cas polaires. Si $s = 1$ alors la consommation est toujours nulle. A fortiori elle doit être nulle à l'état stationnaire. Si $s = 0$, alors le stock de capital intensif décroît à chaque instant car l'investissement est toujours nul. Le taux de décroissance de k est constant et déterminé par le taux de dépréciation du capital par tête ($n + \delta$). Pendant la transition le niveau de la consommation est positif, mais à long terme la consommation devient nulle car le le capital et produit intensifs tendent vers zéro.
Imaginons que nous dévions marginalement de ces deux cas polaires. Plaçons nous dans le cas où la totalité du revenu est épargnée ($s = 1$). Si on diminue de façon infinitésimale le taux d'épargne alors, même si cela va contribuer à diminuer le niveau de long terme de k et y, cela va induire une augmentation (infinitésimale) de la consommation à long terme. Dans ce cas une diminution du taux d'épargne induit une augmentation de la consommation à long terme. Envisageons le cas symétrique où la totalité du revenu est consommée à chaque instant ($s = 0$). Une augmentation infinitésimale du taux d'épargne nous permet de définir un état stationnaire non trivial, où le produit sera strictement positif, vers lequel l'économie va se diriger. Ainsi en augmentant le taux d'épargne on crée un « gâteau » à long terme, que le ménage pourra partager entre épargne et consommation. Une augmentation infinitésimale du taux d'épargne induit une augmentation infinitésimale de la consommation à long terme.
Au total on comprend pourquoi l'effet d'une variation du taux d'épargne induit un effet ambigu sur la consommation à long terme. Quand s est proche de 1, le modèle prédit une relation décroissante entre le taux d'épargne et la consommation à long terme. Quand s est proche de 0, le modèle prédit une relation croissante entre le taux d'épargne et la consommation à long terme. Tout ceci suggère qu'il pourrait exister un taux d'épargne optimal, au sens de la maximisation du niveau de la consommation par tête à long terme, entre 0 et 1. C'est ce que nous nous proposons d'établir ici. Posons la consommation intensive à l'état stationnaire comme une fonction du taux d'épargne :

$$c^*(s) = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On définit formellement le taux d'épargne de la règle d'or, s_{or}, de la façon suivante :

$$s_{\text{or}} = \arg\max_s c^*(s)$$

La condition nécessaire d'optimalité associée à ce programme est :

$$-\left(\frac{s_{\text{or}}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-s_{\text{or}})}{n+\delta}\left(\frac{s_{\text{or}}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = 0$$

En excluant le cas où $s_{\text{or}} = 0$ (il s'agit d'un des deux cas polaires, évoqués plus haut, pour lequel on atteint le plus faible niveau possible de consommation à long terme), on peut diviser les deux membres de cette équation par le premier terme du membre de gauche. On obtient :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-s_{\text{or}})}{n+\delta}\left(\frac{s_{\text{or}}}{n+\delta}\right)^{-1}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-s_{\text{or}})}{s_{\text{or}}}=\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow s_{\text{or}}=\alpha$$

notre candidat pour le taux d'épargne de la règle d'or. Nous venons de montrer qu'il existe une unique valeur de s pour laquelle la dérivée de $c^*(s)$ est nulle. Il nous reste à montrer que nous avons bien maximisé une fonction. La preuve est directe. Il suffit de noter que nous pouvons reprendre les quatres équations précédentes en remplaçant "=" par ">" ou "<". On voit alors directement que la dérivée est positive si et seulement si le taux d'épargne est inférieur à la part du capital dans la valeur ajoutée. Autrement dit la courbe représentative de la fonction $c^*(s)$ est nulle en zéro et en un, pour le reste elle a la forme d'un bol inversé. Ces signes de la dérivée sont conformes avec l'analyse à proximité des cas polaires évoqués plus haut. Pour conclure, $s_{\text{or}}=\alpha$ est bien le taux d'épargne de la règle d'or. On obtient les niveaux de long terme des variables intensives en remplaçant s par s_{or} dans les expressions de k^*, y^* et c^*. En particulier, nous obtenons :

$$c^*_{\text{or}}=(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Pour interpréter notre résultat, on peut réécrire la définition de l'état stationnaire du capital physique intensif de la règle d'or de la façon suivante [3] :

$$\alpha\left[k^*_{\text{or}}\right]^{1-\alpha}=n+\delta$$

Le terme sur le membre de droite s'interprète comme le rendement du capital par tête (la productivité marginale) à l'état stationnaire de la règle d'or. De façon équivalente, on a :

$$\alpha\left[k^*_{\text{or}}\right]^{1-\alpha}-(n+\delta)=0$$

Notre résultat devient transparent. Le taux d'épargne de la règle d'or, c'est le taux qui permet d'annuler le rendement du capital intensif net de sa dépréciation. Imaginons que le ménage représentatif puisse choisir son comportement d'accumulation, *ie* la valeur de s, sur des considérations de long terme. Supposons que le rendement net du capital soit négatif à long terme. Cette situation apparaît lorsque $s>\alpha$. En effet, dans ce cas $k^*>k^*_{\text{or}}$ et, en vertu de l'hypothèse de rendements décroissants du capital, on a immédiatement :

$$s\left[k^*\right]^{1-\alpha}-(n+\delta)<\alpha\left[k^*_{\text{or}}\right]^{1-\alpha}-(n+\delta)=0$$

Si le ménage ne se préoccupe seulement que de ce qu'il peut gagner ou perdre à long terme, il est alors incité à réduire son taux d'épargne. Cela se traduit

3. En remplaçant s par α.

par une baisse du niveau de long terme du capital intensif et, à nouveau par l'hypothèse de rendements décroissants du capital [4], une augmentation du rendement net du capital intensif à long terme. Il va réduire son taux d'épargne tant que le rendement net du capital intensif à long terme est négatif. Par symétrie, si le rendement net du capital intensif est positif à long terme, alors le ménage est incité à augmenter son taux d'épargne, puisqu'il obtient alors un bénéfice. Il va augmenter son taux d'épargne tant que le rendement net du capital intensif est strictement positif. Ainsi, on comprend bien que le meilleur choix pour le ménage est d'accorder son comportement d'accumulation de façon à annuler le rendement net du capital intensif.

(4) On suppose l'existence d'un gouvernement qui taxe proportionnellement les revenus des ménages et alloue le montant de l'impôt à l'accumulation du capital. L'équation d'évolution du capital agrégé devient :

$$\dot{K}(t) = s(1-\tau)Y(t) + \tau Y(t) - \delta K(t)$$

où $\tau \in [0,1]$ est le taux d'imposition. En regroupant les termes en $Y(t)$, il vient :

$$\dot{K} = (s + \tau(1-s))Y - \delta K$$

Le stock de capital agrégé augmente si et seulement si l'investissement effectif est supérieur à la dépréciation du capital. L'investissement effectif est composé de l'investissement « choisi » [5] par le ménage représentatif sur la base de son revenu disponible, $s(1-\tau)Y$, et de l'investissement induit par la politique fiscale de l'état, τY [6]. En posant $s_\tau = s + \tau(1-s)$ le taux d'épargne effectif (c'est-à-dire incluant l'effet « redistribution » de la politique fiscale), on peut poursuivre comme dans le modèle de Solow habituel :

$$\dot{K} = s_\tau Y - \delta K$$

Nous retrouvons donc directement le résultat habituel :

$$\dot{k}(t) = (s + \tau(1-s))k(t)^\alpha - (n+\delta)k(t)$$

Le stock de capital intensif augmente si et seulement si l'investissement (effectif) par tête couvre la dépréciation du capital intensif.

(5) Pour caractériser l'économie à l'état stationnaire il nous suffit de déterminer l'état stationnaire du capital physique intensif. En utilisant s_τ, le taux d'épargne effectif, au lieu de s on voit immédiatement que l'état stationnaire de k devient :

$$k^* = \left(\frac{s + \tau(1-s)}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4. Le terme $\alpha\left[k^*\right]^{1-\alpha}$ est une fonction décroissante de k^*.
5. Dans le modèle de Solow, le comportement d'épargne est exogène ; le taux d'épargne n'est pas une variable de choix du ménage représentatif.
6. Pour le dire autrement, en suivant la dernière équation, l'investissement effectif est composé de l'investissement que choisirait le ménage dans un monde sans politique fiscale, sY, et de l'investissement induit par la politique fiscale, $\tau(1-s)Y$, une partie de la consommation souhaitée et détournée par l'état vers l'accumulation de capital physique.

et en substituant dans la fonction de production :

$$y^* = \left(\frac{s+\tau(1-s)}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La consommation à long terme est définie par la part non épargnée, $1-s$, du revenu disponible à long terme $(1-\tau)y^*$. À l'état stationnaire, nous devons avoir :

$$c^* = (1-s)(1-\tau)\left(\frac{s+\tau(1-s)}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On obtient des résultats intuitifs par rapport à ce que nous avons l'habitude de voir. Une augmentation de la taxe, c'est-à-dire une augmentation du taux d'épargne effectif, induit une augmentation du niveau de long terme du capital et du produit intensifs. L'effet sur le niveau de long terme de la consommation est plus ambigu. Une augmentation de la taxe augmente certes le produit (ou le revenu) à long terme mais dans le même temps elle diminue la fraction du revenu que le ménage peut partager entre épargne et consommation. Selon les tailles respectives de ces deux effets le revenu disponible des ménages peut baisser ou augmenter. La consommation étant proportionnelle au revenu disponible, celle-ci peut baisser ou augmenter à long terme suite à une augmentation permanente du taux de taxe.

(6) On suppose que dans le monde sans politique fiscale, le ménage sous accumule le capital : $s < s_{\text{or}} = \alpha$. On a vu dans notre réponse à la question précédente que l'effet d'une variation permanente du taux de taxe sur le niveau de la consommation par tête est ambigu. On veut montrer, par analogie avec le taux d'épargne de la règle d'or, qu'il existe un taux de taxe, strictement positif, qui maximise la consommation à long terme. Celui-ci est défini de la façon suivante :

$$\overline{\tau} = \arg\max_{\tau} c^*(\tau)$$

La condition nécessaire d'optimalité associée à ce programme est :

$$(1-s)\left[\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-s)(1-\overline{\tau})\left[\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1-s}{n+\delta}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

En supposant que $\overline{\tau}$ est strictement positif (sinon il ne s'agit plus d'une taxe mais d'une subvention) $s+\overline{\tau}(1-s)$ est nécessairement positif et donc nous pouvons diviser les deux membre de cette égalité par le membre de gauche :

$$1 = (1-\overline{\tau})\left[\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right]^{-1}\frac{1-s}{n+\delta}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{(1-\overline{\tau})(1-s)}{s+\overline{\tau}(1-s)}$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)(s+\overline{\tau}(1-s)) = \alpha(1-\overline{\tau})(1-s)$$

$$\Leftrightarrow s+\overline{\tau}(1-s)-\alpha s-\alpha\overline{\tau}(1-s) = (\alpha-\alpha\overline{\tau})(1-s)$$

$$\Leftrightarrow s + \overline{\tau}(1-s) - \alpha s - \alpha\overline{\tau}(1-s) = \alpha - \alpha\overline{\tau} - s\alpha + s\alpha\overline{\tau}$$
$$\Leftrightarrow s + \overline{\tau} - \overline{\tau}s - \alpha s - \alpha\overline{\tau} + s\alpha\overline{\tau} = \alpha - \alpha\overline{\tau} - s\alpha + s\alpha\overline{\tau}$$
$$\Leftrightarrow s + \overline{\tau}(1-s) = \alpha$$

D'où finalement :

$$\overline{\tau} = \frac{\alpha - s}{1-s} > 0$$

On voit directement[7] qu'il s'agit bien d'un maximum car la dérivée de c^* par rapport à τ est positive si et seulement si $\tau < \overline{\tau}$. Notons que nous parvenons à exhiber une valeur de τ optimale strictement positive car nous avons postulé une situation de sous accumulation ($s < \alpha$). Le meilleur choix consiste à ajuster le taux d'imposition, τ, de façon à égaliser le taux d'épargne effectif, s_τ, avec le taux d'épargne de la règle d'or ($s_{\text{or}} = \alpha$).

(7) On peut montrer que le taux de taxe $\overline{\tau}$ permet d'obtenir un niveau de consommation à long terme identique à celui que nous obtiendrions en suivant la règle d'or. Pour établir ce point il suffit de substituer l'expression obtenue de $\overline{\tau}$ dans l'expression analytique de c^* obtenue plus haut. On a :

$$c^*(\overline{\tau}) = (1-s)(1-\overline{\tau})\left(\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow c^*(\overline{\tau}) = (1-s)\frac{1-\alpha}{1-s}\left(\frac{s+\alpha-s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow c^*(\overline{\tau}) = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow c^*(\overline{\tau}) = c^*_{\text{or}}$$

Ainsi, en détournant (par l'intermédiaire d'une politique fiscale) une partie du revenu destiné à la consommation vers l'accumulation, l'état parvient à répliquer le taux d'épargne de la règle d'or.

Un peu plus loin... L'état peut mimer la règle d'or, en dirigeant de façon autoritaire une partie de la consommation des ménages vers l'accumulation, car l'économie est dans une situation de sur accumulation. Dans le cas contraire, *ie* dans une situation de sous accumulation, l'état ne peut atteindre cet objectif à l'aide de la politique fiscale que nous venons de décrire. En effet, la politique fiscale considérée ici revient simplement à faire en sorte que le taux d'épargne effectif,s_τ, soit supérieur au taux d'épargne s. Cela va dans le bon sens car l'économie est dans une situation de sous accumulation. Quand, au contraire, les ménages sur accumulent le capital physique, on ne peut se rapprocher de la règle d'or en faisant en sorte que le taux d'épargne effectif soit supérieur au taux d'épargne. Il faut amender la redistribution implicite (entre consommation et investissement) mise en oeuvre à l'aide de la politique fiscale. Pour cela on pourrait simplement supposer que l'état redistribue ses gains liés aux taxes

7. En remplaçant "=" par ">" dans les équivalences qui précèdent.

sur les revenus sous la forme d'unités de consommation au ménage. Dans ce cas la loi d'évolution du stock de capital agrégé devrait s'écrire :

$$\dot{K} = s(1-\tau)Y - \delta K$$

Le taux d'épargne effectif serait alors $s_\tau = s(1-\tau)$. Et le niveau de consommation serait donné par : $c(t) = [(1-s)(1-\tau)+\tau]y(t)$. En suivant la même démarche, on peut montrer que dans une situation de sur accumulation ($s > \alpha$) il est alors possible de trouver un taux de taxe positif qui maximise le niveau de consommation à long terme. On montre que ce taux de taxe doit être tel que le taux d'épargne effectif égalise le taux d'épargne de la règle d'or : $\overline{\tau} = (s-\alpha)/s$. Enfin on montre qu'avec cette politique fiscale l'état peut mimer le taux d'épargne de la règle d'or ($c^*(\overline{\tau})$) en détournant de façon autoritaire l'épargne vers la consommation.

Pour finir, il convient de noter que l'effet de la politique fiscale dans le modèle de Solow demeure simple car le comportement d'épargne est exogène. Un changement de politique fiscale n'affecte pas le comportement d'accumulation des ménages.

EXERCICE 2 **[Vitesse de convergence]** Le niveau de la technologie (B) affecte l'état stationnaire de la même façon que le taux d'épargne s. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que B n'apparaît que comme un facteur de s dans l'équation différentielle caractérisant la dynamique du stock de capital par tête. On remarque que le paramètre B, de la même manière que le taux d'épargne, n'affecte pas la vitesse de transition vers l'état stationnaire.

(1) Trivial. L'état stationnaire est :

$$k^\star = \left(\frac{sB}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Une augmentation du niveau de la technologie, B, induit une élévation du niveau de long terme de l'économie (comme le taux d'épargne en capital physique). **(2)** Notons

$$\varphi(k) = sBk^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

la fonction définissant le taux de croissance de k. En considérant une approximation de Taylor à l'ordre 1 dans un voisinage de l'état stationnaire, nous avons :

$$\frac{\dot{k}}{k} \simeq \varphi(k^\star) + \varphi'(k^\star)\,(k-k^\star)$$

Puisque par définition de l'état stationnaire nous avons $\varphi(k^\star) = 0$, il vient :

$$\frac{\dot{k}}{k} \simeq \varphi'(k^\star)\,(k-k^\star)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\varphi'(k) = -(1-\alpha)sB\frac{k^{\alpha-1}}{k}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\varphi'(k^\star) &= -(1-\alpha)sB\frac{\frac{n+\delta}{sB}}{k^\star}\\ &= -(1-\alpha)(n+\delta)\frac{1}{k^\star}\end{aligned}$$

Nous obtenons l'approximation suivante du taux de croissance dans un voisinage de l'état stationnaire :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{k}}{k} &\simeq -(1-\alpha)(n+\delta)\frac{k-k^\star}{k^\star}\\ \Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k} &\simeq (1-\alpha)(n+\delta)\left(1-\frac{k}{k^\star}\right)\end{aligned}$$

Le taux de croissance est positif si et seulement si le stock de capital physique par tête est inférieur à son niveau de long terme. **(3)** Notons que dans un voisinage de l'état stationnaire $1-\frac{k}{k^\star}$ est proche de zéro. Par ailleurs on sait que $\log(1+x)\simeq x$ pour x dans un voisinage de 0. Ainsi :

$$\log\left(1-\left(1-\frac{k}{k^\star}\right)\right)\simeq -\left(1-\frac{k}{k^\star}\right)$$

ou de façon équivalente :

$$\log\frac{k}{k^\star}\simeq -\left(1-\frac{k}{k^\star}\right)$$

Nous avons donc :

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k}\simeq -(1-\alpha)(n+\delta)\log\frac{k}{k^\star}$$

On notera $\beta=(1-\alpha)(n+\delta)$ la vitesse de convergence. **(4)** En posant $\alpha={}^1\!/_3$ et $n+\delta=4\%$, on obtient une vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire de 2,66%. Notons que cette vitesse est "artificiellement" basse car nous avons omis le progrès technique dans ce modèle. Il faut ${}^{\log 2}\!/_{\beta}\simeq 26$ ans pour réduire de moitié la distance à l'état stationnaire. Le taux d'épargne n'a aucun effet sur la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire. **(5)** Quantitativement, la transition dans ce modèle semble plutôt satisfaisante. La vitesse de convergence théorique n'est pas très éloignée de ce que suggère les données. Mais cela est la conséquence de l'omission du progrès technique qui pose par ailleurs de gros problèmes... Puisque la prédiction de ce modèle est que le taux de croissance des variables par tête est nul à long terme, ce qui semble en contradiction avec les données.

EXERCICE 3 **[Terre dans le modèle de Solow] (1)** En appliquant la fonction logarithme népérien à la fonction de production :

$$\log Y(t)=\alpha\log K(t)+\beta\log A(t)+\beta\log L(t)+(1-\alpha-\beta)\log T$$

puis en dérivant par rapport à t on obtient directement :

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\alpha\frac{\dot{K}}{K}+\beta(n+x)$$

(2) Puisque les taux de croissance de la population (n) et de technologie (x) sont constants, le taux de croissance du produit est constant si et seulement si le taux de croissance du capital physique est constant. **(3)** Le taux de croissance du stock de capital physique est donné par :

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta$$

l'investissement brut par unité de capital moins le taux de dépréciation du capital physique. On voit que le taux de croissance du capital physique est une fonction croissante de la productivité moyenne du capital. Ainsi une augmentation de ${}^{K}/_{Y}$ se traduit par une baisse du taux de croissance de K. On voit aussi qu'une condition nécessaire et suffisante pour le taux de croissance de K soit constant est que le ratio K/Y soit constant, c'est-à-dire que les taux de croissance de K et Y soient identiques. **(4)** Le long du sentier de croissance équilibré nous avons $g_K = g_Y$ et donc :

$$g_Y = \alpha g_Y + \beta(n + x)$$

soit de façon équivalente :

$$g_Y = \frac{\beta}{1-\alpha}(n + x)$$

Dans le modèle de Solow habituel (sans le facteur fixe Terre) le taux de croissance de long terme de la production est $n + x$. On peut montrer que ${}^{\beta}/_{1-\alpha}$ est inférieur à 1 et que donc le taux de croissance est plus faible en présence d'un facteur fixe. En effet :

$$\begin{aligned} &\frac{\beta}{1-\alpha} < 1 \\ &\Leftrightarrow \beta < 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta < 1 \end{aligned}$$

ce qui est vrai par hypothèse (rendements décroissants par rapport à K et L). **(5)** Nous savons que :

$$g_K = s\frac{Y}{K} - \delta$$

En dérivant les deux membres par rapport au temps, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{g}_K &= s\left(\frac{\dot{Y}}{K}\right) \\ \Leftrightarrow \dot{g}_K &= s\frac{\dot{Y}K - Y\dot{K}}{\dot{K}} \\ \Leftrightarrow \dot{g}_K &= s\frac{Y}{K}\left(g_Y - g_K\right) \end{aligned}$$

Si le taux de croissance du produit est supérieur au taux de croissance du capital, alors le taux de croissance du capital doit augmenter. Ceci suggère une propriété de stabilité du sentier de croissance équilibré (comme dans le modèle de Solow sans facteur fixe). D'après la réponse à la première question, nous avons :

$$g_Y = \alpha g_K + \beta(n + x)$$

$$\Leftrightarrow g_Y - g_K = -(1-\alpha)g_K + \beta(n+x)$$
$$\Leftrightarrow g_Y - g_K = (1-\alpha)\left(\frac{\beta}{1-\alpha}(n+x) - g_K\right)$$

En notant :
$$g_K^\star = \frac{\beta}{1-\alpha}((n+x))$$
le taux de croissance à long terme du capital, il vient :
$$g_Y - g_k = (1-\alpha)\left(g_K^\star - g_K\right)$$
Ainsi nous avons :
$$\dot{g}_K = s\frac{Y}{K}(1-\alpha)\left(g_K^\star - g_K\right)$$
Le taux de croissance de K augmente si et seulement s'il est inférieur à $g_K^\star$, le sentier de croissance équilibré est donc stable.

À long terme le taux de croissance du produit est égal au taux de croissance du capital physique et le taux de croissance du produit par tête est donné par :
$$g_y^\star = \frac{\beta}{1-\alpha}((n+x)) - n$$
où nous savons que $\beta/1-\alpha < 1$, pour des petites valeurs du taux de croissance de la technologie (x) il se peut donc que le taux de croissance du produit par tête soit négatif.

Exercice 4 **[Pétrole dans le modèle de Solow] (1)** En prenant le logarithme népérien de la fonction de production puis en dérivant par rapport à t, on obtient :
$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + \beta(n+x) + (1-\alpha-\beta)\frac{\dot{P}}{P}$$
(2) Puisque les taux de croissance de la population (n), de la technologie (x) et de la ressource naturelle ($-v$) sont constants, si le taux de croissance du capital est constant alors le taux de croissance de la production est nécessairement constants. **(3)** D'après la loi d'évolution du stock de capital physique nous avons :
$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta$$
Ainsi une augmentation du ratio K/Y, l'inverse de la productivité moyenne du capital, se traduit par une baisse de taux de croissance du stock de capital physique. Pour que le taux de croissance de K soit constant il faut et il suffit que le ratio K/Y soit constant (son inverse, la productivité moyenne du capital, doit être constante). Sous cette même condition, le taux de croissance de Y est constant. **(4)** Le long du sentier de croissance équilibré, le taux de croissance du produit est égal au taux de croissance du stock de capital physique (le ratio K/Y est alors constant). Nous pouvons donc écrire la première équation de la façon suivante :
$$(1-\alpha)\frac{\dot{Y}}{Y} = \beta(n+x) + (1-\alpha-\beta)\frac{\dot{P}}{P}$$

puis en divisant par $1-\alpha$:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\beta}{1-\alpha}(n+x) + \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}\frac{\dot{P}}{P}$$

le taux de croissance du produit le long du sentier de croissance équilibré. Dans le modèle de Solow de base, c'est-à-dire sans pétrole, le taux de croissance du produit le long du sentier de croissance équilibré est $n+x$. On sait déjà que $\beta(n+x)/1-\alpha$ est inférieur à $n+x$, en notant que le taux de croissance de la ressource épuisable est $-v < 0$, on conclut que taux de croissance le long du sentier de croissance équilibré est plus faible lorsque l'on augmente le modèle de Solow avec le pétrole. Le taux de croissance est alors :

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\beta}{1-\alpha}(n+x) - \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}v$$

Le produit peut décroître si la dépréciation de la ressource naturelle est assez importante (supérieure à $(n+x)\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}$). **(5)** Nous savons que le taux de croissance du stock de capital est :

$$g_K = s\frac{Y}{K} - \delta K$$

en dérivant par rapport au temps, il vient :

$$\dot{g}_K = s\frac{Y}{K}(g_Y - g_K)$$

Par ailleurs nous avons :

$$g_K^\star = \frac{\beta}{1-\alpha}(n+x) - \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}v$$

et

$$\begin{aligned} g_Y &= \alpha g_K + \beta(n+x) - (1-\alpha-\beta)v \\ \Leftrightarrow g_Y - g_K &= -(1-\alpha)g_K + \beta(n+x) - (1-\alpha-\beta)v \\ \Leftrightarrow g_Y - g_K &= -(1-\alpha)(g_K - g_K^\star) \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation de la variation du taux de croissance de K on obtient :

$$\dot{g}_K = -s\frac{Y}{K}(1-\alpha)(g_K - g_K^\star)$$

Cette équation nous dit que le taux de croissance de K augmente si et seulement si le taux de croissance est inférieur au taux de croissance le long du sentier de croissance équilibré ($g_K^\star$). Ainsi on voit que le sentier de croissance équilibré est stable, dans le sens où si l'économie quitte le sentier de croissance équilibré elle finit forcément par le rejoindre ; $g_K^\star$ est donc aussi le taux de croissance à long terme. **(7)** Le taux de croissance du produit par tête est :

$$g_y = g_Y - n = \alpha g_K + \beta(n+x) - (1-\alpha-\beta)v - n$$

Ce taux de croissance n'est pas forcément positif, même si $g_Y > 0$. **(8)** Pour toute variable $X(t)$ on pose :

$$\hat{x}(t) = \frac{X(t)}{A(t)L(t)P(t)}$$

En particulier on montre facilement que :

$$\hat{y}(t) = \hat{k}(t)^{\alpha}$$

Puis en suivant la démarche habituelle, on obtient la variation de $\hat{k}$:

$$\dot{\hat{k}}(t) = s\hat{k}^{\alpha} - (n + x + \delta - v)\hat{k}(t)$$

où $n + x + \delta - v$ est le taux de dépréciation de $\hat{k}$. À l'état stationnaire l'investissement en $\hat{k}$ doit être égal au taux de dépréciation de $\hat{k}$. On trouve l'état stationnaire non trivial :

$$\hat{k}^{\star} = \left(\frac{s}{n + x + \delta - v}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$